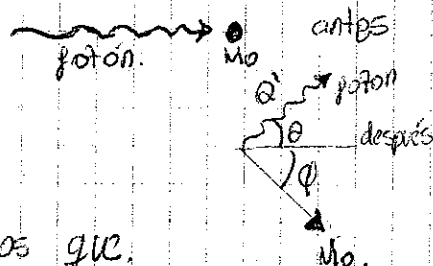


4.8.6 Dispersión Elástica. Efecto Compton.

El efecto Compton es el fenómeno que pone más en claro las propiedades corpusculares de la radiación electromagnética, y consiste en el choque elástico entre un fotón y un electrón libre en reposo.

Supongamos que un fotón de una energía Q incide sobre un electrón, adquiriendo este un momentum \vec{p} y desviándose el fotón un ángulo θ con una nueva energía Q' .



Por conservación de energía y momentum, tenemos que.

$$(91) \quad Q + M_0 c^2 = Q' + E$$

$$(92) \quad (Q/c) u_{0x} = (Q'/c) u_0 + \vec{p}$$

Por otro lado, tenemos una relación para la energía, momentum y energía en reposo del electrón:

$$(93) \quad E^2 - (pc)^2 = (M_0 c^2)^2$$

Las relaciones (91) y (92) las podemos escribir como:

$$(91a) \quad (Q - Q') + M_0 c^2 = E \Rightarrow (Q - Q')^2 + 2M_0 c^2(Q - Q') + (M_0 c^2)^2 = E^2$$

$$(92) \quad Q u_x - Q' u_0 = \vec{p} c \quad Q^2 - 2Q Q' \cos \theta + Q'^2 = (pc)^2$$

Si restamos estas dos ecuaciones, tendremos que.

$$2Q Q' (\cos \theta - 1) + 2M_0 c^2(Q - Q') + (M_0 c^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

Aplicando la ecuación (93) obtenemos:

$$2Q Q' (\cos \theta - 1) + 2M_0 c^2(Q - Q') = 0$$

Escrita de otra forma.

$$(94) \quad \frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q} = \frac{1}{M_0 c^2} (1 - \cos \theta)$$

Pero $Q = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ entonces.

$$(95) \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{M_0 c} (1 - \cos \theta)$$

El término $h/M_0 c$ se denomina longitud de onda Compton y establece una relación entre el ángulo de dispersión de los fotones y la variación de su longitud de onda.

4.9. Tercera ley de Newton:

En la mecánica newtoniana se postula las tres leyes de Newton y de allí se deduce la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía.

La tercera ley de Newton, la cual es también conocida como ley de acción y reacción, establece que a toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Esto es, si tenemos dos partículas interactuando y F_{21} es la fuerza sobre la segunda partícula debido a la primera y F_{12} es la fuerza sobre la primera debido a la segunda, entonces debe tenerse que:

$$(96) \quad F_{12} = -F_{21}$$

Este postulado presenta en este mismo marco sus inconvenientes. Tomemos, por ejemplo dos partículas alejadas que interactúan en un instante dado. Mientras las dos partículas permanezcan en reposo, la tercera ley se cumple sin problema. Pero si en una de ellas ocurre un cambio, este influirá a la otra partícula durante un cierto intervalo de tiempo, dependiendo este de la velocidad de la propagación de la interacción. Este problema se arregla mediante la consideración de la propagación infinita de tales interacciones.

En relatividad especial, si embargo, existe una velocidad máxima de propagación de señales, y esta corresponde a c . Por lo tanto al hablar de la interacción de dos cuerpos en un instante dado no tiene sentido. Por ejemplo, en el caso de dos partículas cargadas eléctricamente moviéndose, los campos electromagnéticos varían continuamente y, por lo tanto, no es de esperarse que las fuerzas tengan el mismo módulo ni actúen en direcciones opuestas.

Para el caso de una colisión, en donde la interacción ocurre en una región relativamente pequeña del espacio, podemos hablar de una interacción simultánea entre las partículas.

En la dinámica relativista se postulan las dos principales leyes de Newton: la equivalencia entre todos los sistemas de referencia inerciales, y la definición de la fuerza como la variación del momento de la partícula. Por otro lado, se postula la conservación del cuadrivector:

$$(97) \quad \vec{F} = d\vec{P}/dt \quad P = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad ; \quad \sum_{i=1}^N p_i^\mu = \text{cte.}$$

De la conservación del cuadrivector se deriva la conservación del momentum y de la energía.

Para el caso de acción a distancia, la ley de conservación del momentum sigue siendo válida, pero no solo hay que considerar el momentum de las partículas, sino también el momentum del "velo" que viaja a través del campo producido en ellas.

Para el caso de partículas que colisionan, tenemos que ellas interactúan en un mismo punto del espacio, y por lo tanto, el momentum total del sistema es el momentum de las dos partículas:

$$P_{\text{total}} = P_1 + P_2 = \text{constante.}$$

derivando: $\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = 0$
de acuerdo a (eq. 7).

$$F_{12} + F_{21} = 0 \Rightarrow F_{12} = -F_{21}$$

Por lo tanto, para el caso de una colisión la Tercera ley de Newton es válida.

V Electrodinámica

Las ecuaciones de Maxwell por si mismas son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, por lo tanto, pueden adoptar la forma covariante, comencemos con la ecuación de continuidad.

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

Esta se puede escribir en forma covariante introduciendo el cuadrivector carga-corriente:

$$(2) \quad j^\mu = (c\rho, \vec{J})$$

Con esto (1) toma la forma covariante.

$$(3) \quad \partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad \partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Para escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante debemos definir el tensor intensidad de campo antisimétrico:

$$(4) \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de Maxwell, serán entonces.

$$(5) \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

$$(6) \quad \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} = 0 \quad \text{o} \quad \partial^{\alpha\beta} F^{\beta\gamma\alpha} = 0$$

En efecto, desarrollando cada una de las ecuaciones en (5).

$$(7) \quad \beta=0. \quad \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{4\pi}{c} c\rho$$

$$(8) \quad \beta=1 \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{4\pi}{c} J_x$$

$$(8) \quad \beta=2 \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{4\pi}{c} J_y$$

$$(8) \quad \beta=3 \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{4\pi}{c} J_z$$

de (7) obtenemos

$$\text{I} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \rho$$

sumando las (8) obtenemos

$$\text{II} \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ahora tomemos en (6) $\alpha=1$ $\beta=2$ $\gamma=3$

$$(9) \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

entonces

$$\text{III} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$(10a) \quad \alpha=0 \quad \beta=2 \quad \gamma=3 \Rightarrow \partial^0 F^{23} + \partial^3 F^{02} + \partial^2 F^{30} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0$$

$$(10b) \quad \alpha=0 \quad \beta=1 \quad \gamma=3 \Rightarrow \partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} + \partial^1 F^{30} = \frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = 0$$

$$(10c) \quad \alpha=0 \quad \beta=1 \quad \gamma=2 \Rightarrow \partial^0 F^{12} + \partial^2 F^{01} + \partial^1 F^{20} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0$$

Sumando las ecuaciones (10) obtenemos que:

$$\text{IV} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La ecuación de continuidad se deduce aplicando la divergencia en II y reemplazando $\nabla \cdot \vec{E}$ por $4\pi\rho/c$.

De la cuadrifuerza la podemos describir como:

$$(11) \quad \frac{dP^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

$$\text{Ahora } \frac{dP^\mu}{d\tau} = \left(\frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F} \right) \gamma(u) \quad u^\mu = \gamma(u) (c, \vec{v}) \quad e := \text{carga.}$$

Desarrollando las componentes espaciales, tenemos.

$$(12a) \quad F_x = e \left(E_x + \frac{1}{c} (B_y v_z - B_z v_y) \right)$$

$$(12b) \quad F_y = e \left(E_y + \frac{1}{c} (B_z v_x - B_x v_z) \right)$$

$$(12c) \quad F_z = e \left(E_z + \frac{1}{c} (B_x v_y - B_y v_x) \right)$$

Sumando las ecuaciones (12) obtenemos la fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)$$

5.2 Transformación de Campos electromagnéticos.

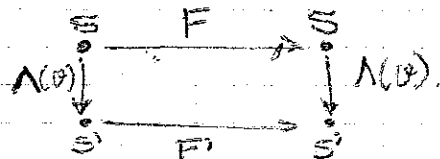
Los campos eléctricos y magnéticos se pueden transformar a partir de la regla de transformación del tensor intensidad de campo.

$$(13) \quad F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

Esto lo podemos interpretar como un cambio de base y escribirlo en forma matricial (tomando el tensor F como un operador de una transformación)

$$F = \Lambda^{-1} F \Lambda$$

$$= \Lambda(-v) F \Lambda(v)$$



donde v es la velocidad de S' respecto a S y $\beta = \frac{v}{c}$

entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma E_x & -\gamma E_x & -E_y & -E_z \\ \gamma E_x & -\beta\gamma E_x & -B_z & B_y \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z + \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & \gamma(B_y - \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -E'_y & -E'_z \\ E'_x & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma(E_y - \beta B_z) & -\gamma(E_z + \beta B_y) \\ \gamma E_x & 0 & -\gamma(B_z + \beta E_y) & \gamma(B_y - \beta E_z) \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z + \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & \gamma(B_y - \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma obtenemos las reglas de transformación de campos

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned}$$

Estas las podemos reducir a cuatro ecuaciones.

$$E'_\parallel = E_\parallel$$

$$B'_\parallel = B_\parallel$$

$$E'_\perp = \gamma(E_\perp + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp)$$

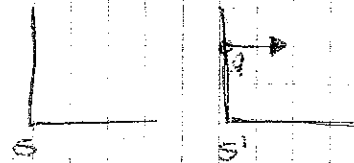
$$B'_\perp = \gamma(B_\perp - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp)$$

5.21. Campo electromagnético de una carga en movimiento.

Consideremos una carga q en reposo respecto a un sistema de referencia S' el cual está con una velocidad $\vec{v} = (v, 0, 0)$ respecto a S . El campo eléctrico y magnético en S estará dado por:

$$E_x = \frac{x' q}{r'^3} \quad E_y = \frac{y' q}{r'^3} \quad E_z = \frac{z' q}{r'^3}$$

$$B_x = 0 \quad B_y = 0 \quad B_z = 0$$



Usando las transformaciones inversas para los campos, obtenemos el campo eléctrico y magnético respecto a S . esto es, el campo de una carga en movimiento.

$$E_x = E'_x = \frac{x' q}{r'^3} = \frac{x' r(\theta)}{r'^3} \quad (x' = r(\theta)x)$$

$$E_y = E'_y r(\theta) = \frac{y' q}{r'^3} r(\theta) = \frac{y q}{r'^3} r(\theta) \quad (y' = y)$$

$$E_z = E'_z r(\theta) = \frac{z' q}{r'^3} r(\theta) = \frac{z q}{r'^3} r(\theta) \quad (z' = z)$$

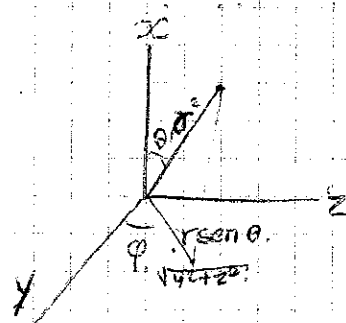
entonces,

$$\vec{E} = \frac{q \vec{r} r(\theta)}{r'^3} \quad \text{el campo eléctrico es radial}$$

$$\text{Pero } r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 x^2 + y^2 + z^2 = [x^2 + y^2 + z^2 - (v^2/c^2)(y^2 + z^2)] r^2(\theta)$$

Usando coordenadas esféricas, obtenemos que: $(y^2 + z^2) = r^2 \sin^2 \theta$, entonces:

$$r'^2 = [r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)] r^2 \quad \beta^2 = v^2/c^2$$



Por lo tanto el campo eléctrico será:

$$\vec{E} = \frac{q r(\theta) \vec{r}}{r^3 r(\theta) [1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}$$

entonces, el campo eléctrico estará dado por:

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \frac{1 - v^2/c^2}{[1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} \vec{u}_r$$

Esto nos indica que las líneas de campo son más intensas en la parte ecuatorial, donde $\theta = \pi/2$.

El campo magnético de la carga en movimiento tendrá solo componente perpendicular a la velocidad.

$$B_{\perp} = -\gamma(v) \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}' \quad B_{\parallel} = 0$$

entonces

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\gamma(v) \frac{v}{c} E_z' = -\gamma(v) \frac{v}{c} q \frac{z'}{r'^3} = \frac{\gamma(v) v q}{c} \frac{z}{r^3 [1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta]^{3/2} \gamma^2(v)}$$

$$B_y = \frac{q}{r^2 c} \frac{v (1 - v^2/c^2) \sin \theta \sin \phi}{[1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}$$

Asimismo $B_z = \frac{q}{r^2 c} \frac{v (1 - v^2/c^2) \sin \theta \cos \phi}{[1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}$

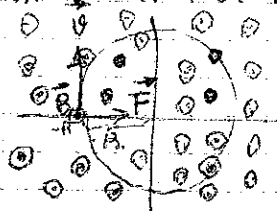
entonces

$$B_{\perp} = \frac{q}{r^2 c} \frac{v (1 - v^2/c^2) \sin \theta}{[1 - v^2/c^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}$$

5.2.2. Transformación de un campo magnético uniforme

Una partícula de carga q y masa m se mueve en una órbita circular de radio R y velocidad angular ω , en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B \hat{z}$, respecto a un sistema de referencia S .

La fuerza siempre es perpendicular a la velocidad, como se encuentra de la fuerza de Lorentz.



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Por lo que la magnitud de la velocidad es constante y la fuerza sobre la carga será centrípeta:

$$q v B = \frac{m v^2}{r} \quad \text{pero } v = \omega r \Rightarrow q \omega r B = m r \omega^2$$

entonces

$$B = \frac{q B}{m}$$

El movimiento circular uniforme se logra dándole una velocidad v_x, v_y inicial a la carga, partiendo de una posición $-R \hat{x}$, tomando como origen de coordenadas el centro de la circunferencia que describe.

Para hallar la ecuación de movimiento para un observador S' moviéndose con velocidad V respecto a S a lo largo del eje x' , Aplicamos la regla de transformación de los campos y hallamos V_x' y x_d' respecto a S' .

Para S' la partícula "entra" al campo electromagnético con una velocidad y posición iniciales:

$$v_y' = v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad x_0' = -R \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Los campos eléctricos y magnéticos que experimenta esta estarán dados por:

$$E_y' = -\frac{(v/c) B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad B_z' = \frac{B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Por lo tanto, la partícula presentará una aceleración (diferente de la centrípeta) debida a la presencia del campo eléctrico, la ecuación de movimiento será, entonces: (para $v \ll c$)

$$r'(t) = (x_0' + v_y' t - \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_y' t^2) u_y + x_0' \cos \frac{v_0}{r} t u_x + x_0' \sin \frac{v_0}{r} t u_z$$

Las cuadripuerzas correspondientes a los sistemas para la partícula será:

$$\text{en } S \quad f^\nu = \frac{dp^\nu}{d\tau} = \left(\frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F} \right) r(\nu) = (0, \vec{F}) r(\nu)$$

$$f^\nu = -q\phi B (0, \cos\theta, \sin\theta, 0) r(\nu)$$

Para hallar la cuadripuerza en el otro sistema, aplicamos la transformación de Lorentz usual:

$$f'^\nu = \Lambda_\nu^\mu f^\mu = -q\phi B (v/c r(\nu) \cos\theta, r(\nu) \cos\theta, \sin\theta, 0) r(\nu)$$

Como era de esperarse, se tiene que

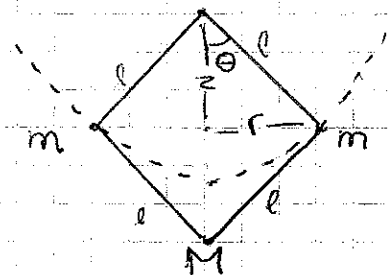
$$f^2 = f'^2 = -q^2 \phi^2 B^2 r^2(\nu)$$

Ecuación de movimiento:

Introduciendo la ligadura

$$z = l \cos \theta$$

$$r = l \sin \theta$$



Se tiene la siguiente expresión para el Lagrangeano

$$L = m(l^2 \omega^2 \sin^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + M l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2(m+M)g l \cos \theta$$

teniéndose entonces que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2(m+M \cos^2 \theta) l^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2(m+M \cos^2 \theta) l^2 \ddot{\theta} + 4M \cos \theta \sin \theta l^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2l^2 (m \sin \theta \cos \theta \omega^2 - M \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2) - 2(m+M)g l \sin \theta$$

la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Conduce a la ecuación de movimiento.

$$2(m+M \cos^2 \theta) l^2 \ddot{\theta} - 2M \cos \theta \sin \theta l^2 \dot{\theta}^2 - m l^3 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + 2(m+M)g l \sin \theta = 0$$

Punto de equilibrio.

Se tiene el Lagrangeano

$$L = m(\dot{r}^2 \omega^2 + \dot{r}^2 + \dot{z}^2) + M \dot{z}^2 + 2(m+M)g z$$

Refiriendo a un sistema de coordenadas no inercial rotando con velocidad angular ω .

$$L = m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + M \dot{z}^2 - U_{ef}$$

Iguando estas dos expresiones tenemos.

$$U_{ef} = -m r^2 \omega^2 - 2(m+M)g z$$

y puesto que $r^2 = l^2 - z^2$

$$U_{\text{ef}} = m\omega^2 z^2 - 2(m+M)gz + ml^2\omega^2.$$

Este potencial efectivo tendrá un mínimo cuando

$$z = \frac{(m+M)g}{m\omega^2}$$

que corresponderá al punto de equilibrio estable del sistema, con una constante restauradora de $K = 2m\omega^2$.

teniendo en cuenta que $\dot{r} = \cot\theta \dot{z}$, el primer término en se puede expresar así

$$\begin{aligned} m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + M\dot{z}^2 \\ &= [m(\cot^2\theta + 1) + M]\dot{z}^2 \\ &= [m\csc^2\theta + M]\dot{z}^2 \\ &\equiv \frac{1}{2}M_{\text{ef}}\dot{z}^2 \end{aligned}$$

en donde

$$M_{\text{ef}} = 2[m\csc^2\theta + M]$$

entonces

$$\omega_z^2 = \frac{K}{M_{\text{ef}}} = \frac{m\omega^2}{m\csc^2\theta + M}$$