

RELATIVIDAD

Programa:

0. Introducción.

I. Transformaciones de Lorentz.

II. Cinemática, adición de velocidades, Efecto Doppler, Paradoja de los mellizos.

III. Estructura matemática de la Relatividad especial, métrica minkowskiana, Cuadrivector, Grupo de Lorentz. Vectores.

IV. Dinámica.

Momentum, Fuerza. Leyes de conservación.

V. Electrodinámica.

Leyes de Maxwell. Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell. Aplicaciones.

VI. Introducción a la relatividad General.

Bibliografía:

A. P. French. Relatividad Especial.

V. A. Ugarov. Special theory of Relativity (4-vectores).

J. H. Smith. Introducción a la relatividad especial

R. A. Said. Relativist Mechanics.

J. L. Singe. Relativity the special theory.

R. V. B. Rucker. Geometry, Relativity and four dimensions (elementos de RG ET).

R. Resnick. Introducción a la TER.

A. N. Matveev. Mechanics and theory of relativity (con TGR).

S. Lilley. Discovering Relativity for Yourself.

R. Hagedorn. Relativistic Kinematics.

T. P. Hill. The doppler Effect.

M. Born. Einstein's theory of Relativity.

V. Alarom. Special theory of Relativity

Rosser (Relatividad especial-electrodinámica).

Introduction of theory of Relativity.

Fernando Alonso-Marroquín

II Transformaciones de Lorentz - Einstein.

1.1. Velocidad de propagación de las Interacciones.

Para describir los fenómenos que ocurren en la naturaleza se utilizan sistemas de referencia. Se entiende por sistema de referencia a la asignación de la posición y coordenada de tiempo a todos los acontecimientos. Los sistemas de referencia inerciales son aquellos para los cuales un objeto libre de fuerzas presenta un movimiento rectilíneo uniforme. Todos los sistemas de referencia inerciales se mueven con velocidad constante unos con otros. En ellos las leyes de la física son invariantes al pasar de un sistema al otro, siendo las expresiones que las expresan iguales.

En la mecánica clásica ordinaria la interacción entre las partículas se describe en términos de su energía potencial, que aparece como función de las coordenadas. Esto suponía una propagación instantánea de las interacciones, puesto que dado un cambio de posición entre las partículas, se supondría un reajuste de la energía potencial en ese mismo instante, sin dependencia del tiempo.

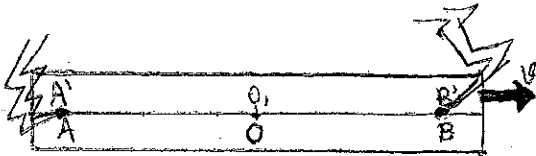
Sin embargo, esto no es del todo correcto. Hay una velocidad máxima de propagación de interacciones y señales, la cual debe ser la misma en cualquier sistema de referencia inercial, como se deduce del principio de relatividad. Dicha velocidad máxima corresponde a la propagación de las ondas electromagnéticas, c , que es una constante universal. ($c = 2.997925 \pm 0.000003 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$)

La combinación del principio de invarianza de las leyes físicas con la postulación de la velocidad máxima de propagación de señales se conoce como principio de relatividad de Einstein, que contrasta con el principio de relatividad clásico en el hecho de que este último considera dicha velocidad infinita, que, por cierto, es una buena aproximación en la mecánica clásica.

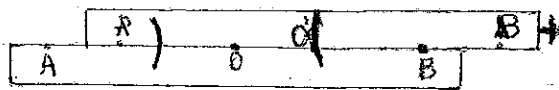
Los dos concepciones coinciden en aceptar la distancia como un concepto relativo. Esto es, si dos sucesos no simultáneos ocurren en el mismo punto del espacio, es necesario especificar en qué sistema de referencia se observa esto. No obstante, el concepto del tiempo es muy diferente para ambos casos; mientras en la mecánica newtoniana el tiempo es un concepto absoluto, en la relatividad especial de Einstein no lo es; en ella, si dos sucesos que ocurren en distintos sitios son simultáneos, hay que especificar en qué sistema de referencia se hace esta observación (como veremos, esto se deduce del principio de relatividad de Einstein).

Para ver esto, consideremos dos sistemas S y S' con velocidad relativa v cuyos orígenes coinciden en $t=0$, los observadores, situados en el origen, ven que en cada uno de los sistemas caen dos rayos, dejando señales permanentes en ambos. Supongamos que después, mediante mediciones, cada observador inercial se da cuenta de que los dos rayos cayeron en puntos equidistantes, y por lo tanto, si para cada uno las señales de luz de los rayos llegaron simultáneamente a su reloj, concluyeron que los eventos fueron simultáneos.

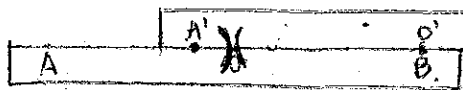
Supongamos que para el observador S , los rayos cayeron simultáneamente, puesto que las señales luminosas tardan un tiempo finito en llegar a O , y el observador S' encontraría que un rayo llegó antes que otro, encontrando que los eventos no ocurrieron simultáneamente.



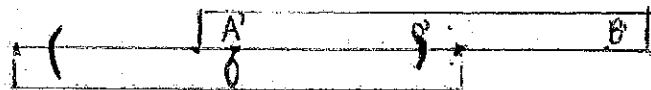
Punto de vista del sistema S donde el sistema S' se mueve hacia la derecha, una onda luminosa deja marcas en $A-A'$ y $B-B'$. Supongamos que los dos eventos son simultáneos para el sistema S .



Antes de llegar a O , S' se ha desplazado hacia la derecha, por lo que primero llega el rayo de luz de A a O' .



Ambos frentes de onda llegan a O .



el frente de onda de B llega a O' por lo que para S' los eventos no son simultáneos, según

el rayo $B-B'$ cayó antes que el rayo $A-A'$.

1.2 Transformaciones de Lorentz.

Las transformaciones galileanas de la mecánica clásica requieren ser reemplazadas por unas transformaciones más generales que concuerden con los postulados de la relatividad especial. Partamos de la más general transformación:

$$\begin{aligned} (1) \quad x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a_{11}'x' + a_{12}'y' + a_{13}'z' + a_{14}'t' \\ y &= a_{21}'x' + a_{22}'y' + a_{23}'z' + a_{24}'t' \\ z &= a_{31}'x' + a_{32}'y' + a_{33}'z' + a_{34}'t' \\ t &= a_{41}'x' + a_{42}'y' + a_{43}'z' + a_{44}'t' \end{aligned}$$

Por el momento, no estamos asegurando que a_{ij} y a_{ij}' sean términos constantes.

Supongamos que el eje x coincide con el eje x' , esto es, cuando $y=z=0$ en S , se tiene que $y'=z'=0$ en S' , entonces:

$$(1.a) \quad a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} y' &= a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

Además, deben ser transformados el plano $x-y$ ($z=0$) en el plano $x'-y'$ ($z'=0$) y el plano $x-z$ ($y=0$) en el plano $x'-z'$ ($y'=0$), por lo que

$$(1.b) \quad a_{23} = a_{32} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} y' &= a_{22}y \quad \text{con} \quad y = 1/a_{22} y' \\ z' &= a_{33}z \quad \quad \quad z = 1/a_{33} z' \end{aligned}$$

Estos coeficientes pueden determinarse bajo la consideración de equivalencia en los sistemas de referencia, supongamos que a lo largo del eje y en S hay una varilla de longitud l , cuando esta está en reposo respecto a S , el observador S' verá la varilla con una longitud $l' = \alpha_{22} l$. Ahora traslademos la varilla al sistema S' , en concordancia con las ecuaciones (1.b), para el observador S la varilla mide $l = l' / \alpha_{22}$. Ahora bien, debido a la reciprocidad que hay entre ambas medidas, el primer postulado requiere que las medidas sean equivalentes, esto es: $\alpha_{22} l = \frac{1}{\alpha_{22}} l$, por lo que $\alpha_{22} = 1$. El mismo análisis se hace para α_{33} . Entonces:

$$(1.c) \quad y' = y \quad z' = z.$$

Ahora, analicemos las transformaciones para x' y t'

$$x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t$$

$$t' = \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t$$

Por la isotropía del espacio, tenemos que t' no depende ni de y ni de z . De lo contrario, relojes dispuestos simétricamente respecto al eje x , parecerían no concordar, vistos desde S' , por lo tanto:

$$(1.d) \quad \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0 \quad \text{y} \quad t' = \alpha_{41}x + \alpha_{44}t$$

En cuanto a x' sabemos que el punto cuya coordenada $x' = 0$ parece moverse en la dirección x con velocidad V (V es la velocidad de S' respecto a S). De manera que la proposición $x' = 0$ debe ser equivalente a $x = Vt$. Suponemos que $x' = \alpha_{11}(x - Vt)$ es la ecuación correcta, puesto que cumple esta condición ($x' = 0$ si $x = Vt$). Esto nos da $x' = \alpha_{11}(x - Vt)$.

Por lo que las cuatro ecuaciones se nos reducen a:

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= \alpha_{11}(x - Vt) & y' &= y \\ t' &= \alpha_{41}x + \alpha_{44}t & z' &= z \end{aligned}$$

Pero la proposición $x = 0$ es equivalente a $x' = -Vt'$ por lo que:

$$(2a) \quad \frac{x'}{t'} = \frac{\alpha_{11}(0 - Vt)}{\alpha_{41}0 + \alpha_{44}t} = -V \Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{44}$$

Por lo tanto, si escogemos un punto P con movimiento uniforme en S , si $\frac{x}{t} = V$ es una constante, entonces, siendo ambos sistemas inerciales, la cantidad

$$(2b) \quad \frac{x'}{t'} = \frac{\alpha_{11}(x - Vt)}{\alpha_{41}x + \alpha_{44}t} = \frac{V - V}{\frac{\alpha_{41}V}{\alpha_{11}} + 1} = V' \quad \text{debe además ser constante, por lo que } \alpha_{44}/\alpha_{11} \text{ es constante.}$$

Pero α_{11} por sí es constante, puesto que, si tomamos en (2) $x = 0$ y usamos la igualdad obtenida en (2a), entonces:

$$(2c) \quad t' = \alpha_{41}t.$$

Esta es la relación entre los dos rates de los dos relojes. Pero, puesto que por definición cada uno de ellos deben marchar a una rate constante

Se requiere que a_{11} sea una constante de proporcionalidad. Por lo tanto, los tres coeficientes de (2) son términos constantes (sólo dependen de la velocidad relativa entre los dos sistemas de referencia).

$$(3) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt) & y' &= y \\ t' &= a_{41}x + a_{11}t & z' &= z \end{aligned}$$

Ahora usemos el postulado de la constancia de la velocidad de la luz en (2b). considerando el punto P moviéndose sobre el eje x con velocidad c, entonces,

$$(3a) \quad \frac{c}{a_{41}c + 1} \Rightarrow \frac{a_{41}}{a_{11}} = -\frac{v}{c^2}$$

Por lo que las transformaciones se nos reduce a:

$$(4) \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}(x - vt) & y' &= y \\ t' &= a_{11}\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) & z' &= z \end{aligned}$$

No obstante, solo hemos considerado una dirección, y el principio establece que la velocidad de la luz debe tener el mismo valor numérico en cualquier dirección. Consideremos un punto moviéndose a lo largo del eje y a velocidad c. Su movimiento no es necesariamente en la dirección y'. Por lo que debemos usar c^2 para eliminar la complicación de la dirección. Por lo tanto, $x=0$ y $y=ct$ nos debe llevar a:

$$(4a) \quad x'^2 + y'^2 = c^2 t'^2$$

Substituyendo de las fórmulas de transformaciones tenemos

$$(4b) \quad a_{11}^2 v^2 t^2 + c^2 t^2 = c^2 (a_{11}^2 t^2) \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma$$

Por lo tanto, nuestras transformaciones son:

$$(5a) \quad \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$(5b) \quad \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Donde las transformaciones inversas son substituidas substituyendo v por $-v$. (el mismo resultado obtenemos hallando la matriz inversa).

De estas transformaciones podemos obtener varias situaciones interesantes. Por ejemplo, si los dos sistemas están en reposo, la transformación se nos reduce a:

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

Ahora, si consideramos la velocidad de la luz infinita, obtenemos las transformaciones de Galileo:

$$(6a) \quad \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

$$(6b) \quad \begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

1.3 Consecuencias de las transformaciones de Lorentz

A partir de las transformaciones de Lorentz, que fueron deducidas a partir de los postulados de Einstein, se obtienen interesantes consecuencias para las mediciones de longitudes y tiempos.

Consideremos dos eventos, cada uno de ellos con coordenadas x_1, y_1, z_1, t_1 y x_2, y_2, z_2, t_2 en S . Ahora consideremos las diferencias en coordenadas de espacio y tiempo:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1, \text{ etc.} \\ \Delta t &= t_2 - t_1 \end{aligned}$$

Ahora definiremos tres casos especiales.

a) Si los dos eventos ocurren al mismo tiempo ($\Delta t = 0$) aunque no necesariamente en el mismo sitio, serán llamados simultáneos.

b) Si dos eventos ocurren en el mismo sitio ($\Delta x = 0$, etc) aunque no necesariamente al mismo tiempo, serán llamados colocales.

c) Si dos eventos ocurren en el mismo sitio y al mismo tiempo, serán llamados coincidentes.

A partir de las transformaciones de Lorentz (5a-b) encontramos que:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \Delta y' &= \Delta y & \Delta x &= \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t - v \Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \Delta z' &= \Delta z & \Delta t &= \frac{\Delta t' + v \Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Vemos que si dos eventos son coincidentes ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta t = 0$) entonces son coincidentes en cualquier sistema de referencia. De otro lado, la simultaneidad y colocalidad son conceptos relativos, como veremos.

1.3.1 Relatividad de la colocalidad; Dilatación del tiempo.

Consideremos dos eventos que ocurren en el mismo sitio, para mayor simplicidad consideremoslos sobre el eje x' , esto es $y' = z' = 0$. Presto que los eventos son colocales en S' , $\Delta x' = 0$ y las ecuaciones (8) se reducen a:

$$(9a) \quad \Delta x = \frac{v \Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (9b) \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Estos dos resultados pueden ser interpretados como sigue:

9a) Los dos eventos que ocurren en el mismo sitio en S' , no son colocales en S . Esto también ocurre en las transformaciones de Galileo, pero hay un factor de corrección, que corresponde al denominador $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

9b) En S , el tiempo transcurrido entre los dos eventos es más largo que en el sistema en movimiento S' . Consideremos un reloj fijo al punto donde ocurrieron esos dos eventos x'_0 . Supongamos que este registra

Una vuelta completa en las manecillas del reloj en el transcurso de los eventos, t_1 y t_2 . El observador en el sistema S registra los tiempos en que ocurrieron estos eventos t_1 y t_2 con dos relojes sincronizados en S . S , estacionarios respecto a él, el primero coincide con el reloj en movimiento en t_1 y el segundo coincide con el reloj en movimiento al final del intervalo. Dichos relojes marcarán un tiempo mayor entre los sucesos, dado por la ecuación (9b) por lo que las manecillas habrán dado más de una vuelta completa. Podemos expresar nuestro resultado diciendo que los relojes en movimiento parecen marchar más despacio.

Este resultado es completamente recíproco: los relojes en S vistos desde S' también parecen marchar más despacio.

1.32. Relatividad de la simultaneidad; Contracción de Lorentz.

Consideremos ahora dos eventos simultáneos según S' , esto es: $\Delta t' = 0$. de las transformaciones generales en (8) tenemos que:

$$(10a) \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$(10b) \quad \Delta t = \frac{(v/c^2) \Delta x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Podemos interpretar estos resultados como sigue:

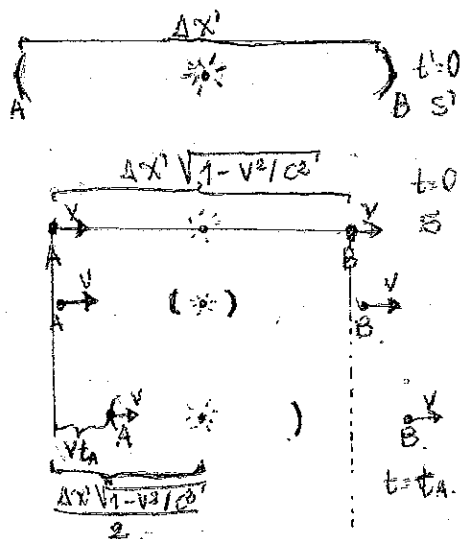
10a). Al haber tomado $\Delta t' = 0$, hemos de tener que $\Delta x'$ es una medida de longitud realizada desde S' , pues se han marcado los dos puntos extremos x_1 y x_2 simultáneamente. Mientras que la longitud $\Delta x = x_2 - x_1$, corresponde a la longitud en reposo respecto a S , por lo que deducimos que si una longitud en reposo es comparada con su valor en movimiento, esta última está contrída en un factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

10b). dos eventos simultáneos en S' no tienen por qué ser simultáneos en S . La diferencia de tiempos está dada por $\Delta t = v \Delta x' / c^2$, esto es análogo a la situación de que si dos puntos son colineales respecto a S' , no tienen por qué serlo para S . Aunque es una cuestión menos evidente, por que será tratado en la siguiente sección.

1.33 Diferencia de fase en la sincronización de relojes.

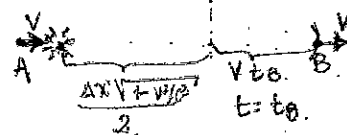
En esta sección se dará una interpretación física del término $v \Delta x' / c^2$ de las transformaciones de Lorentz, al que llamaremos diferencia de fase.

Imaginemos dos relojes A y B, en reposo respecto a S' , y con una separación $\Delta x'$. Para sincronizar los relojes, emitimos un rayo de luz desde el punto medio y ponemos a marchar los relojes tan pronto llegue la luz hasta ellos. De esta forma, los dos relojes marcharán sincronizadamente vistos desde S' . Ahora consideremos este proceso de sincronización según lo ve el observador en el sistema S , para quien los relojes se mueven hacia la derecha con velocidad V . Claramente se ve que los dos relojes no se sincronizan según S . Veamos en cuánto difieren esas lecturas:



- Sincronización de relojes en el sistema S' , en el cual están en reposo. Los relojes marcan $t'=0$ tan pronto llegan los rayos de luz.
- Los relojes, vistos desde S , viajan con velocidad V , y la longitud se ha contraído, siendo la separación entre ellos: $\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2}$. Tomamos $t=0$ el instante en que S ve el destello de luz.

• En $t=t_A$ el reloj A habrá recorrido una distancia $v t_A$ y la señal había llegado a él. Para hallar t_A , usamos la ecuación: $c t_A = (\Delta x'/2) \sqrt{1-v^2/c^2} + v t_A$, encontrando que: $t_A = (\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2} / 2) / (c-v)$. En ese instante, S ve que A empieza a marchar.



• En $t=t_B$ llega el rayo de luz al reloj B, habiendo recorrido una distancia $v t_B$. encontramos $t_B = (\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2} / 2) / (c+v)$. Usando la ecuación $c t_B = (\Delta x'/2) \sqrt{1-v^2/c^2} + v t_B$ encontramos que $t_B = (\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2} / 2) / (c+v)$. En ese

instante t_B empieza a marchar. El intervalo de tiempo entre la puesta de los relojes en S es:

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2}}{c-v} - \frac{\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2}}{c+v} = \frac{\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2}}{c^2-v^2} \cdot v.$$

Sin embargo, durante ese tiempo el reloj se habrá retrasado en un factor $\sqrt{1-v^2/c^2}$, de modo que, para el observador S éste reloj marcará:

$$\Delta t = \Delta t_1 \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{\Delta x' \sqrt{1-v^2/c^2}}{c^2-v^2} = \frac{\Delta x' v}{c^2}.$$

Cuando B se pone a marcar $t'=0$. De modo que los relojes, sincronizados según su sistema en reposo S' , no lo están respecto al sistema S , aumentando su desfase al aumentar la separación entre ellos.

III Cinematica Relativista

III Estructura Matemática de la Relatividad Especial

3.1 Intervalo espacio-temporal.

La ecuación que rige la propagación de una señal de luz (o cualquier señal electromagnética) está dada por:

$$(1a) \quad d = c \Delta t \quad d: \text{distancia recorrida.}$$

Referido a un sistema de referencia S . La ecuación anterior se puede escribir como:

$$(1b) \quad d' = c' \Delta t'$$

Referido a un nuevo sistema de referencia S' . De acuerdo con el segundo postulado de la relatividad especial, $c = c'$.

Ahora supongamos que un suceso consiste en la emisión de una señal de luz, el cual tiene coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) en S y (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) en S' . y un segundo suceso consiste en la llegada de una señal de luz, cuyas coordenadas son (t_2, x_2, y_2, z_2) en S y (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) en S' . reemplazando esto en las ecuaciones (1a) y (1b) y elevando al cuadrado (para descartar direcciones), las ecuaciones toman la forma:

$$(2a) \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 \quad \text{en } S$$

$$(2b) \quad (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 \quad \text{en } S'$$

llamaremos la cantidad escalar:

$$(3) \quad S_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \\ = [c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2]^{1/2}.$$

Como intervalo espacio-temporal entre dos sucesos. Para este caso, tenemos que si $S_{12} = 0$ en un sistema de referencia en particular S , entonces $S'_{12} = 0$ en cualquier otro sistema de referencia.

tomando sucesos infinitesimalmente próximos entre si, para el intervalo ds entre ellos se tiene que:

$$(4) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

el cual se puede considerar como un elemento de longitud en un espacio cuatridimensional ficticio.

De acuerdo a lo anterior tenemos que si $ds=0$ en S , entonces $ds'=0$ en cualquier sistema de Referencia S' . Por otra parte, ds y ds' son infinitesimales del mismo orden. De estas dos condiciones se ds^2 y ds'^2 deben ser proporcionales entre si:

$$ds^2 = a ds'^2$$

donde a puede depender solo de la magnitud de la velocidad relativa entre S y S' , si dependiera de las coordenadas, contradeciría la homogeneidad del espacio y del tiempo; y si dependiera de la dirección de la velocidad relativa, contradeciría la isotropía del espacio. Tomando un nuevo sistema de referencia S'' , V_1 la velocidad relativa entre S y S' y V_2 la velocidad relativa entre S y S'' , tenemos las siguientes relaciones:

$$(5) \quad ds^2 = a(V_1) ds'^2 \quad ds^2 = a(V_2) ds''^2$$

Si tomamos $V_{12} = |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|$ la velocidad relativa entre S' y S'' ,

$$ds'^2 = a(V_{12}) ds''^2$$

Usando las tres relaciones tendremos que:

$$\frac{a(V_1)}{a(V_2)} = \frac{ds'/ds''^2}{ds'/ds'^2} = \frac{ds'^2}{ds''^2} = a(V_{12})$$

Esta relación supone que $a(V_{12})$ depende solo de los módulos de V_1 y V_2 , y no del ángulo que forman. Pero obviamente $|V_{12}|$ depende del ángulo entre \vec{V}_1 y \vec{V}_2 , por lo tanto $a(V)$ debe ser una constante, la cual debe ser '1' en virtud a la misma fórmula. Tenemos, por tanto:

$$(6) \quad ds^2 = ds'^2 \Rightarrow S = S' \text{ (intervalos propios)}$$

Por lo tanto, tenemos que ds es un invariante relativista y, por lo tanto, las transformaciones de Lorentz serán aquellas que dejen invariante este intervalo.

~

3.2. Estructura causal del espacio tiempo.

Consideremos dos sucesos en un sistema de referencia de coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) . Mediante un corrimiento del origen, podemos hacer $t_1 = x_1 = y_1 = z_1 = 0$ y llamar $t_2 = t$, $x_2 = x$, $y_2 = y$ y $z_2 = z$. El intervalo espacio temporal estará dado por:

$$(7) \quad S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

S^2 es siempre una cantidad real, y divide al espacio-tiempo en tres regiones, de acuerdo al valor que tome:

3.2.1. Intervalo tipo espacio: $s^2 < 0$

Para $s^2 > 0$ tenemos que $c^2 t^2 < d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. y decimos que el intervalo es tipo espacio (o como de espacio). Para dichos intervalos, no hay conexión causal entre los eventos. y podemos encontrar, por tanto, sistemas de referencia en los cuales los eventos ocurren en distinto orden en el tiempo o incluso, simultáneamente.

En efecto, tomando un sistema de referencia S' , de la invariancia de s tenemos que:

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

16

17

18

27

140

3.4 Transformación general de Lorentz.

La transformación general de Lorentz es aquella que deja invariante el término ds^2 . Esto es $ds^2 = ds'^2$. Antes de definir dicha transformación formalmente, escribiremos el intervalo al cuadrado s^2 en forma tensorial.

3.4.1 Definición: Tensor de Minkowski.

El tensor de Minkowski es un conjunto de 16 cantidades denotadas por $\eta_{\mu\nu}$ $0 \leq \mu, \nu \leq 3$ y definidas por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad \text{ó} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos escribir $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ usando el tensor de Minkowski. definamos $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. de esta forma el intervalo espacio-temporal se puede escribir como.

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Usando el tensor de Minkowski:

$$s^2 = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} =: \eta_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

donde un índice repetido arriba y abajo reemplaza el término de la sumatoria. en forma similar podemos escribir ds^2 como:

$$(12) \quad ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z).$$

3.4.2. Definición. Transformación de Lorentz

La transformación general de Lorentz está dada por.

$$(13) \quad x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}.$$

Con Λ^{α}_{β} restringidas por la condición

$$(14) \quad \eta_{\alpha\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta_{\gamma\nu}.$$

En efecto, demandando la ecuación (13) obtenemos.

$$(13a) \quad dx'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta}.$$

La condición (14) permite la invariancia de ds^2 en efecto; si

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta}$$

$$ds^2 = \eta_{\gamma\nu} dx^{\gamma} dx^{\nu}.$$

si reemplazamos dx'^{α} y dx'^{β} por la transformación en (13a) obtenemos

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} (\Lambda_{\nu}^{\alpha} dx^{\nu}) (\Lambda_{\mu}^{\beta} dx^{\mu}) \quad \text{Igualando } ds = ds' \text{ obtenemos}$$

$$= \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu}^{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\beta} dx^{\nu} dx^{\mu}$$

$$ds^2 = \eta_{\nu\mu} dx^{\nu} dx^{\mu} \quad \text{La condición (14) } \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\nu}^{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\beta} = \eta_{\nu\mu}$$

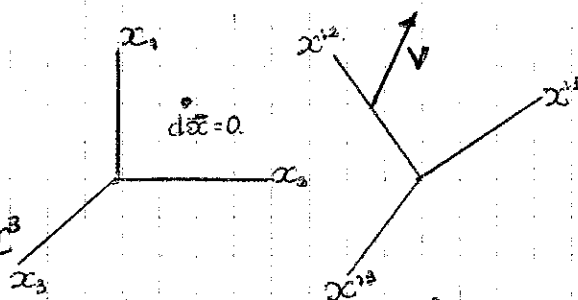
De ahora en adelante tomaremos índices griegos cuando la variación va desde 0 hasta 4 e índices latinos cuando la variación va sobre las coordenadas espaciales únicamente, esto es, de 1 a 3.

Supongamos en (13a) una partícula en reposo respecto al sistema de referencia S. Esto es $d\vec{x}=0$.

Restringiendo (13a) a las coordenadas espaciales, tenemos:

$$(14) \quad dx^i = \Lambda_{\nu}^i dx^{\nu}$$

$$= \Lambda_0^i dx^0 + \Lambda_1^i dx^1 + \Lambda_2^i dx^2 + \Lambda_3^i dx^3$$



Pero $dx^i=0$, por lo tanto, la ecuación (14) se reduce a solo una componente.

$$(15) \quad dx^i = \Lambda_0^i dx^0$$

en particular, tenemos que:

$$(15a) \quad dx^0 = \Lambda_0^0 dx^0$$

Estando la partícula en reposo en S, y siendo $V = (V^1, V^2, V^3)$ la velocidad relativa entre S y S', se tendría que la velocidad de la partícula respecto a S' en cada una de las componentes espaciales será:

$$(16) \quad v^i = \frac{dx^i}{dt'} = -V^i \quad dt' = \frac{dx^0}{c}$$

Dividiendo (15)/(15a) y usando la relación (16) tendríamos que

$$\frac{\Lambda_0^i}{\Lambda_0^0} = \frac{dx^i}{dx^0} = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{dt'} = -\frac{V^i}{c}$$

entonces,

$$(17) \quad \Lambda_0^i = -\frac{V^i}{c} \Lambda_0^0$$

Ahora consideremos en (14) $V=N=0$:

$$\eta_{\alpha\beta} \Lambda_0^{\alpha} \Lambda_0^{\beta} = \eta_{00} = 1.$$

Expandiendo los terminos de la relacion obtenemos.

$$(18) \quad (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2 = 1$$

Pero de (17) $\Lambda_0^i = -v^i/c \Lambda_0^0$, por lo tanto.

$$(\Lambda_0^0)^2 - \sum_i \left(-\frac{v^i}{c}\right)^2 (\Lambda_0^0)^2 = 1$$

$$(\Lambda_0^0)^2 + (\Lambda_0^0)^2 \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad \text{con } v^2 = \sum_i (v^i)^2$$

Donde obtenemos Λ_0^0 y por lo tanto los Λ_0^i de (17).

$$(19) \quad \Lambda_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \Lambda_0^i = \frac{-v^i/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{v^i}{c} \gamma(v)$$

Donde el factor Λ_0^0 suele definirse con la letra gamma:

$$\Lambda_0^0 = \gamma(v)$$

Ya tenemos los coeficientes Λ_0^i que relacionan la coordenada temporal x^0 con las espaciales x^i .

Ahora, Λ_i^j relaciona cada coordenada espacial x^i con la coordenada temporal x^0 .

Exigiendo una invarianza de las transformaciones bajo la inversion del tiempo tendremos que

$$(20) \quad \Lambda_0^i = \Lambda_i^0 \quad \text{y quedan por determinar los } \Lambda_i^j$$

Ahora, toda matriz de transformacion de Lorentz se puede escribir como el producto de dos matrices, una que involucra la velocidad relativa entre los sistemas, la que llamaremos B y otra que involucra rotaciones de los ejes, que llamaremos R .

$$(21) \quad \Lambda = B \cdot R$$

Escojamos los siguientes elementos de modo que no involucren rotaciones:

$$\Lambda_i^j = \delta_i^j + v^j v^i (\gamma(v) - 1) / v^2$$

Pero siempre podemos escoger los ejes de modo que $v^j = (v^1, v^2, v^3) = (v, 0, 0)$ de modo que de la relacion anterior solo queda $\Lambda_1^1 = \gamma(v)$.

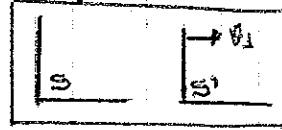
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \gamma(v) & -(v/c)\gamma(v) & -(v_2/c)\gamma(v) & -(v_3/c)\gamma(v) & 0 \\ -(v/c)\gamma(v) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(v_2/c)\gamma(v) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(v_3/c)\gamma(v) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \Lambda_i^j = \delta_i^j + \frac{v^j v^i (\gamma(v) - 1)}{v^2}$$

$$B \text{ con } v = (v, 0, 0) \quad (22)$$

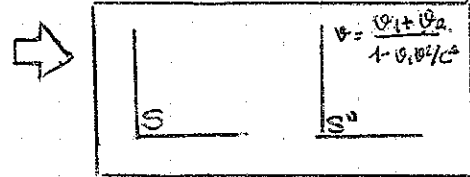
matriz sin involucrar rotaciones: $\Lambda = B$

3.4.2 Ejercicio:

Supongamos que $\Lambda(\beta_1)$ es una transformación de coordenadas de S a S' y $\Lambda(\beta_2)$ es una transformación de coordenadas de S' a S'' , demostrar que la transformación de coordenadas de S a S'' se puede escribir como $\Lambda(\beta_{12})$ con β_{12} dada por:



$$\beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}$$



Solución:

Si $X' = \Lambda(\beta_1) X$ entonces $X'' = \Lambda(\beta_1) \Lambda(\beta_2) X$
 $X'' = \Lambda(\beta_2) X'$

Pero de acuerdo a la transformación () y teniendo en cuenta que las componentes x^2 y x^3 no cambian podemos escribir $\Lambda(\beta_1)$ y $\Lambda(\beta_2)$ como:

$$\Lambda(\beta_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1 \gamma_1 \\ -\beta_1 \gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \quad \Lambda(\beta_2) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 \\ -\beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} \gamma_1 = \gamma(\beta_1) \\ \gamma_2 = \gamma(\beta_2) \end{matrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Lambda(\beta_1) \Lambda(\beta_2) &= \gamma_1 \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 - \beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}} \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 \beta_2 & -(\beta_1 + \beta_2) \\ -(\beta_1 + \beta_2) & 1 + \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad \beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \end{aligned}$$

Completando los cuadrados en el radical, obtenemos*

$$\Lambda(\beta_1) \Lambda(\beta_2) = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{12} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{12}^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$(23) \quad \Lambda(\beta_1) \Lambda(\beta_2) = \Lambda(\beta_{12}) \quad \beta_{12} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad \beta = v/c$$

Dividiendo sobre c , obtenemos la ley de transformación (o adición) de velocidades, obtenida anteriormente.

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

* $(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2 = (1 + 2\beta_1 \beta_2 + \beta_1^2 \beta_2^2) - (\beta_1^2 + 2\beta_1 \beta_2 + \beta_2^2) = 1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2$

Propiedades de las transformaciones de Lorentz

3.43. Concepto de grupo:

Un grupo es un conjunto G con una operación binaria interna* tal que:

- i. $\exists e \in G \mid \forall g \in G, e \cdot g = g \cdot e = g$
- ii. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G, g_1(g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
- iii. $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G \mid g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

3.43. Teorema.

Las transformaciones de Lorentz forman un grupo, llamado **grupo de Poincaré**, donde los elementos son las matrices Λ de elementos Λ^μ_ν y la operación binaria es el producto usual entre matrices.

Demostración:

i. Podemos definir e como $\Lambda(\vec{v}=0, \text{rotación}=0, \alpha^N=0)$. Este es la matriz correspondiente al **Tensor de Kronecker**:

$$(24) \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu=\nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

ii. La asociatividad se sigue del producto usual de las matrices

iii. $\forall \Lambda(\vec{v}) \exists \Lambda(-\vec{v}) \mid \Lambda(\vec{v})\Lambda(-\vec{v}) = \Lambda(-\vec{v})\Lambda(\vec{v}) = \mathbb{E}$ donde e es la matriz de componentes $\delta_{\mu\nu}$.

3.44. Teorema:

El conjunto de transformaciones del grupo de Lorentz satisfacen:

1. $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$
2. $\det \Lambda = \pm 1$

Demostración

Usamos la relación (18)

$$1. (\Lambda^0_0)^2 = \sum_i (\Lambda^0_i)^2 + 1 \Rightarrow (\Lambda^0_0)^2 = \gamma^2(v) \geq 1.$$

2. Tomemos en (14) $\alpha = N$ y $\gamma = \beta$: entonces: $\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \eta_{\mu\nu}$
Podemos escribir esto en notación matricial:

$$\eta = \Lambda \Lambda^T \eta$$

Sacando determinante: con $\Lambda = \Lambda^T$ (transpuesta)

$$\det \eta = \det \Lambda \det \Lambda^T \det \eta$$

Puesto que el determinante de la matriz es igual que el determinante de la transpuesta, por lo tanto,

$$-1 = [\det \Lambda]^2 (-1) \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1.$$

Clasificación de las transformaciones de Lorentz

3.4.5. Transformaciones propias de Lorentz.

Si $\Lambda^0_0 \geq 1$ y $\det \Lambda = 1$ se dice que la transformación de Lorentz es propia y se caracteriza por que al hacer tender $\Lambda(\vec{v})$ a $\Lambda(0)$ continuamente, el determinante no cambia.

3.4.6 Transformaciones impropias de Lorentz.

Las transformaciones impropias involucran dos casos:

$\Lambda^0_0 \geq 1$ y $\det \Lambda = -1$ Inversión del espacio.

$\Lambda^0_0 < -1$ y $\det \Lambda = 1$ Inversión del tiempo

Para el caso del $\det \Lambda = -1$ no se puede hacer tender continuamente $\Lambda(\vec{v})$ a $\Lambda(0)$ sin que el determinante cambie abruptamente de -1 a 1 .

Las transformaciones de Lorentz impropias no forman un grupo.

Estructura de las transformaciones de Lorentz cuadrivectores

3.4.7. Definición: Espacio-tiempo de Minkowski

El espacio de Minkowski se define como:

$$(25) \quad M^4 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2\}$$

El grupo de Poincaré-Lorentz se define, entonces, por:

$$(26) \quad G = \{L: M^4 \rightarrow M^4 \mid x^2 = (Lx)^2\}$$

3.4.8. Definición: Producto interno en M^4

El producto interno en el espacio de Minkowski se define por

$$(27) \quad \bullet : M^4 \times M^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

Entonces $x \cdot y = y \cdot x = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$

Aquí denotamos $x^2 = x \cdot x$

el cual no es una norma en sentido estricto, (ni siquiera es una seudonorma)

Por poseer estos vectores cuatro componentes, reciben el nombre de **Cuadrivectores**.

3.4.9. Definiciones

X^ν designa las llamadas componentes contravariantes del cuadrivector X . Asimismo, X_ν designa las llamadas componentes covariantes del cuadrivector X . Las ecuaciones de la física requieren ser escritas en forma covariante, de esta forma adquirirán la misma forma en todos los sistemas de referencia.

Las componentes X^ν y X_ν del cuadrivector X se relacionan de la siguiente forma:

$$(28) \quad X_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = \eta_{\nu N} X^N = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = X^\nu.$$

El producto interno de los cuadrivectores se puede escribir, por lo tanto, como:

$$(29) \quad X \cdot Y = \eta_{\nu N} X^\nu Y^N = X_\nu Y^N = X^\nu Y_\nu$$

3.4.10 Teorema:

El producto interno en M^4 es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Demostración: Consideremos la transformación de Lorentz homogénea;

$$X'^\nu = \Lambda^\nu_N X^N$$

entonces,

$$X' \cdot Y' = \eta_{\mu\nu} X'^\mu X'^\nu = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\alpha X^\alpha) (\Lambda^\nu_\beta X^\beta) = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta X^\alpha X^\beta = \eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = X \cdot Y.$$

3.5. Estructura causal del espacio-tiempo.

Consideremos dos sucesos de coordenadas $E_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ y $E_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$. Normalizando la coordenada temporal y introduciendo la notación correspondiente, tendremos que estos dos sucesos corresponden a los cuadrivectores:

$$E_1 \equiv (x_0^1, x_1^1, x_2^1, x_3^1)$$

$$E_2 \equiv (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2)$$

El intervalo entre esos dos sucesos será:

$$(30) \quad \Delta x^2 \equiv s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2.$$

Si elegimos el origen de coordenadas en E_2 , tendremos que el intervalo corresponderá a:

$$(31) \quad s^2 = X^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2.$$

O tomándolos infinitamente próximos

$$(32) \quad d\alpha^2 = ds^2 = (d\alpha^0)^2 - (d\alpha^1)^2 - (d\alpha^2)^2 - (d\alpha^3)^2$$

Para poder representar esto, tenemos que reducir las dimensiones, de esta forma, tendremos las representaciones gráficas de M^4 que se conoce como diagramas de Minkowski.

Para el caso, tomaremos solo la primera coordenada espacial x^1 esto no nos hace perder generalidad, pues, cualquier coordenada espacial es equivalente.

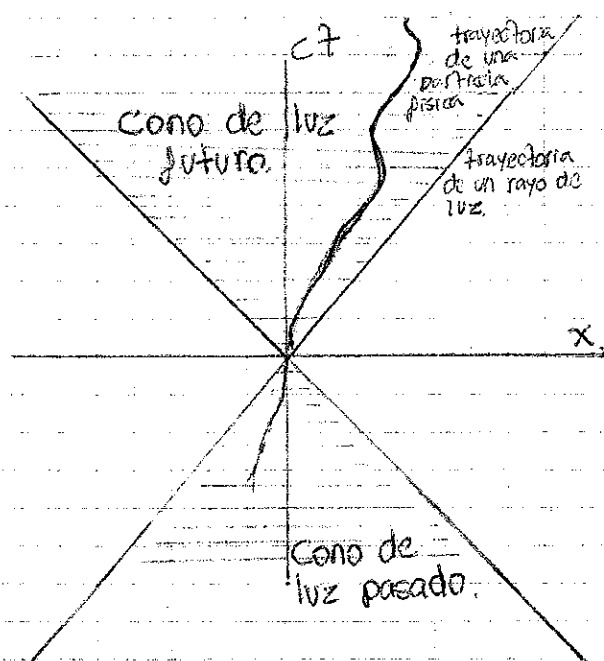
Tomando como el eje de las ordenadas $\alpha^0 = ct$ y el eje de las abscisas el eje espacial x^1 .

tomamos ahora, el primer suceso, con coordenadas $(\alpha^0, \alpha^1) = (0, 0)$. Analizaremos tres casos:

1) Supongamos que en $(0, 0)$ sale un rayo de luz, entonces si el segundo suceso es la llegada de luz a algun punto (α^0, α^1) el intervalo espacio-temporal estará dado por: $x^2 = c^2 t^2$, esto es:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = 0$$

A este intervalo lo llamaremos intervalo tipo luz: $s^2 = 0$.



2) Consideremos ahora la trayectoria de una partícula física*. Puesto que esta no puede superar la velocidad de la luz, tendremos que el intervalo entre cualesquiera dos sucesos que suceden el "el" estará dado por: $x^2 < c^2 t^2$, esto es:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 < 0$$

En el diagrama de Minkowski, la trayectoria recibe el nombre de la "línea del mundo de la partícula", la curva correspondiente no debe superar la pendiente de $v = c$ (la pendiente medida respecto al eje x^0).

Si tomamos el suceso $E_1 = (0, 0)$ como presente, podemos dividir todas las trayectorias permitidas por las partículas en dos zonas conocidas como cono de luz pasado y cono de luz futuro.

* Al hablar de partículas físicas, deberíamos incluir los fotones, pero aquí nos referimos a partículas con masa en reposo.

llamaremos intervalos tipo espacio aquellos en donde se tiene que:

$$s^2 < 0.$$

Puesto que la distancia espacial entre los dos sucesos es menor que la distancia que recorrería la luz (como velocidad máxima de las interacciones) en el intervalo de tiempo que los separa, diremos que los sucesos están conectados causalmente. De acuerdo a lo anterior, no podemos decir que existe algún sistema de referencia en el cual los sucesos ocurren simultáneamente o en distinto orden, pues esto violaría el principio de causalidad.

IV Cinemática y Dinámica de partículas Relativistas.

El objeto Fundamental de la mecánica newtoniana es asignar coordenadas a sistemas físicos para así poder determinar las leyes que gobiernan todos los procesos.

Para la descripción de un sistema se vale del vector posición \vec{r} y de un parámetro o escalar t , el cual permanece invariante bajo cualquier transformación galileana. A estas cantidades las denominamos "escalares" respecto a determinada transformación. Posteriormente se toma la variación de \vec{r} respecto al parámetro t como otra cantidad fundamental y sobre estas se construye la física.

En Relatividad Especial t no es un parámetro conveniente. Pues no es un escalar bajo transformaciones de Lorentz. En ella debemos elegir cantidades cuadrivectoriales para asignarle coordenadas a la Variedad espacio-temporal M^4 . podemos elegir como parámetro al escalar de Lorentz s^2 o el tiempo propio $\tau = s/c$. Los llamamos escalares de Lorentz porque son cantidades que no cambian bajo transformaciones de ese tipo.

Para el caso de partículas físicas, tenemos que τ es una cantidad real, ya que $s^2 > 0$, para ella definimos la quadri-posición y la cuadrivelocidad como sigue:

$$\begin{aligned} (1) \quad X^\mu(\tau) &= (ct(\tau), \vec{x}(\tau)) & \left\| \quad \text{con } d\tau = \frac{\sqrt{ds^2}}{c} = \frac{\sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2}}{c} = \sqrt{1 - v^2} dt \right. \\ (2) \quad U^\mu(\tau) &= \frac{dX^\mu}{d\tau} & \left\| \quad \text{y } \tau = \int_0^t d\tau = \int_0^t \sqrt{1 - v^2} dt \right. \end{aligned}$$

De esta forma, las ecuaciones de la física se pueden escribir en términos de quadri-posiciones y velocidades, los primeros forman el espacio de Minkowski M^4 y los segundos forman el llamado espacio tangente de Minkowski denotado por $T(M^4)$. De esta forma, el espacio $M \times T(M^4)$ le da una sólida estructura matemática a la física.

4.2. Cuadrivelocidad

Sea S un sistema de referencia inercial y P una partícula física, la cual tiene una velocidad \vec{v} (la cual llamaremos velocidad física) y un vector posición \vec{x} respecto a S . Tenemos que la cuadriposición y la cuadrivelocidad para ella es.

$$(3) \quad X^\nu = (ct, \vec{x}) = (x^0, \vec{x}).$$

$$U^\nu = \frac{dX^\nu}{d\tau} = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}) = (c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau})$$

Pero $dt/d\tau = \gamma(v)$ y $(d\vec{x}/dt) = \vec{v}$, entonces

$$(4) \quad U^\nu = \gamma(v) (c, \vec{v}).$$

La norma del cuadvectores U^ν es un escalar de Lorentz. En efecto:

$$U^2 = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \eta_{00} (U^0)^2 + \eta_{ii} (U^i)^2 = c^2 \gamma^2(v) - v^2 \gamma^2(v) \\ = \frac{(c^2 - v^2)}{(1 - v^2/c^2)} = c^2 > 0.$$

$$(5) \quad U^2 = c^2 > 0. \quad \text{Por lo tanto } U \text{ es un cuadvectores tipo tiempo.}$$

Ahora tomemos un cuadvectores $U^\nu = \gamma(v') (c, \vec{v}')$ correspondiente a un sistema de referencia S' que se mueve sobre el eje x^\perp con una velocidad V respecto a S . Usemos la transformación (22) para el cuadvectores U^ν para llegar a la ley de transformación de velocidades:

$$U^\nu = \Lambda^\nu_\mu U'^\mu$$

entonces, llamando $\gamma' = \gamma(v')$, $\gamma = \gamma(V)$ y $\gamma_0 = \gamma(v)$ tendremos que

$$(6) \quad \begin{pmatrix} c\gamma' \\ \gamma' v'_x \\ \gamma' v'_y \\ \gamma' v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c & 0 & 0 \\ -\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma_0 \\ \gamma_0 v_x \\ \gamma_0 v_y \\ \gamma_0 v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\gamma_0(1 - v_x V/c^2) \\ \gamma\gamma_0(v_x - V) \\ \gamma_0 v_y \\ \gamma_0 v_z \end{pmatrix}$$

de las cuatro ecuaciones resultantes obtenemos:

$$(7) \quad \gamma'_1 = \gamma(v') = \gamma(V) \gamma(v) (1 - v_x V/c^2) \rightarrow \frac{\gamma(V) \gamma(v)}{\gamma(v')} = \frac{1}{1 - v_x V/c^2}$$

$$\Rightarrow (8) \quad v'_x = \frac{\gamma(V) \gamma(v) (v_x - V)}{\gamma(v')} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}$$

$$(9) \quad v'_y = \frac{\gamma(v) v_y}{\gamma(v') (1 - v_x V/c^2)} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} v_y}{1 - v_x V/c^2}$$

$$(10) \quad v'_z = \sqrt{1 - v^2/c^2} v_z / (1 - v_x V/c^2)$$

Las ecuaciones 8, 9. y 10 corresponden a la ley de transformación de Velocidades

4.3 Cuadriaceleración:

Consideremos una partícula física con posición, velocidad y aceleración $\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ respecto a S . Para ella definimos la cuadriaceleración como la segunda derivada de la cuadriposición respecto al tiempo propio de la misma:

$$(11) \quad a^\nu = \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} = \frac{dU^\nu}{d\tau}$$

Tomando U^ν en (4) tendremos que

$$\begin{aligned} a^\nu &= \frac{d}{d\tau} Y(\vartheta)(c, \vec{v}) = \left(c \frac{dY}{d\tau}, \frac{d}{d\tau} (Y(\vartheta) \vec{v}) \right) \\ &= \left(c \frac{dY(\vartheta)}{d\tau}, Y(\vartheta) \frac{d\vec{v}}{d\tau} + \vec{v} \frac{dY(\vartheta)}{d\tau} \right) \\ &= \left(c \frac{dY}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \frac{dt}{d\tau}, Y_0 \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{dt}{d\tau} + \vec{v} \frac{dY}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \text{ siendo } Y_0 = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{tenemos que } \frac{dY_0}{d\vartheta} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2v/c^2)}{2} = \frac{1}{2} \frac{2v}{c^2} Y_0^3 = \frac{v Y_0^3}{c^2}(\vartheta)$$

entonces:

$$(12) \quad a^\nu = \left(\frac{v}{c} Y^4(\vartheta) |\vec{a}|, Y^2(\vartheta) \vec{a} + \frac{|\vec{v}| |\vec{a}|}{c^2} Y^4(\vartheta) \vec{v} \right)$$

4.3.1 Teorema: $U \cdot a = 0$.

demostración:

$$U^2 = c^2, \text{ entonces } \frac{dU^2}{d\tau} = 2U \frac{dU}{d\tau} = 2U \cdot a = 0$$

$$(13) \quad \Rightarrow U \cdot a = 0$$

La norma de la cuadriaceleración es también un invariante relativista, para calcularla, tomemos un sist. Inercial de referencia que este instantaneamente en reposo respecto a la partícula, Esto es $\vec{v} = 0$ para S en $t = t_0$, entonces:

$$(14) \quad \begin{aligned} U &= (c, 0) \\ a &= (0, \vec{a}) \end{aligned}$$

Demostremos que $U \cdot a = 0$, (esto lo podemos hacer porque el producto escalar de cuadrivectores es invariante bajo transformaciones de Lorentz. además $a^2 = -|\vec{a}|^2 < 0$ por lo tanto, a es un cuadrivector tipo espacio. La norma del cuadrivector a^2 es igual a $-|\vec{a}|^2$ en cual-

quier otro sistema de referencia. Al cuadrivector $a = (a^0, \vec{a})$ se le conoce como aceleración propia de la partícula.

4.4. Paradoja de los Mellizos

Ahora vamos a estudiar uno de los efectos relativistas más interesantes. Consideremos la famosa "paradoja" de Pedro y Pablo, que se supone que son mellizos, nacidos al mismo tiempo. Cuando cumplen la mayoría de edad, Pablo parte de la tierra en una nave hacia el centro de la galaxia, que dista 30.000 años luz de la tierra, con una aceleración propia de $1g$. Veamos que sucede con ellos durante el viaje.

Tomemos como sistema de referencia inercial la tierra: S . Esto es, Pedro es un observador inercial, y para él se cumplen todas las leyes de la física, desde el punto de vista de la relatividad especial.

Por otra parte, tomemos la nave como una partícula P acelerada respecto a S . de paso, debemos aclarar que Pablo no es un observador inercial, por lo tanto, no es de esperar que las leyes de la física se cumplan desde el punto de vista de la relatividad especial.

Tomemos como U y A la Cuadrivelocidad y la cuadrivelocidad del cohete que aborda Pablo. Estas satisfacen las siguientes relaciones: (suponiendo un movimiento rectilíneo de la nave).

$$(1.5) \quad U^2 = c^2 = (U^0)^2 - (U^1)^2$$

$$(1.6) \quad A \cdot U = 0 = A^0 U^0 - A^1 U^1$$

$$(1.7) \quad A^2 = -g^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2$$

de (1.6) obtenemos que

$$(1.8) \quad A^0 = \frac{U^1}{U^0} A^1 \quad \text{reemplazamos este resultado en (1.7) obteniendo.}$$

$$(1.9) \quad g^2 = (A^1)^2 \left(1 - \left(\frac{U^1}{U^0} \right)^2 \right)$$

pero de (1.5) tenemos que $\left(\frac{U^1}{U^0} \right)^2 = 1 - \left(\frac{c}{U^0} \right)^2$ por lo tanto (1.9) toma la forma:

$$(2.0) \quad g^2 = (A^1)^2 \left(\frac{c}{U^0} \right)^2 \quad \text{entonces:}$$

$$(2.1) \quad A^1 = \frac{g}{c} U^0 \quad \text{y de (1.8) obtenemos que}$$

$$(2.2) \quad a^0 = \frac{g}{c} u^1$$

diferenciando las dos ultimas ecuaciones obtenemos.

$$(2.1a) \quad \frac{da^1}{d\tau} = \frac{g}{c} \frac{du^0}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2 u^1}{d\tau^2} = \frac{g}{c} \frac{du^0}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2 u^1}{d\tau^2} = \frac{g}{c} a^0$$

$$(2.2a) \quad \frac{da^0}{d\tau} = \frac{g}{c} \frac{du^1}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2 u^0}{d\tau^2} = \frac{g}{c} \frac{du^1}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2 u^0}{d\tau^2} = \frac{g}{c} a^1$$

Combinando estas dos ecuaciones con (2.1) y (2.2) obtenemos dos ecuaciones diferenciales para u^1 y u^0 :

$$(2.3) \quad \frac{d^2 u^1}{d\tau^2} = \frac{g^2}{c^2} u^1 \Rightarrow u^1 = C_1 \cosh g/c\tau + C_2 \sinh g/c\tau$$

$$(2.4) \quad \frac{d^2 u^0}{d\tau^2} = \frac{g^2}{c^2} u^0 \Rightarrow u^0 = C_3 \cosh g/c\tau + C_4 \sinh g/c\tau$$

Ahora analicemos las condiciones iniciales del cohete en $t=0$, el cohete parte del reposo. esto es, con una cuadrivelocidad $(c, 0)$ y con una cuatraceleeración $(0, g)$. por lo tanto, las condiciones iniciales para (2.3) y (2.4) son

$$(2.3a) \quad u^1(\tau=0) = 0, \quad \left. \frac{du^1}{d\tau} \right|_{\tau=0} = g \quad \text{entonces} \quad u^1 = C \sinh g/c\tau$$

$$(2.4a) \quad u^0(\tau=0) = c, \quad \left. \frac{du^0}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad \text{entonces} \quad u^0 = C \cosh g/c\tau$$

Ahora hallemos la cuatroposición referente al cohete. tenemos que en $\tau=0$ $x = (ct, x^1) = (0, 0)$ entonces.

$$(2.3b) \quad x^1(\tau=0) = 0 \quad \text{entonces} \quad x^1 = \frac{c^2}{g} (\cosh \frac{g}{c} \tau - 1)$$

$$(2.4b) \quad x^0(\tau=0) = 0 \quad \text{entonces} \quad x^0 = \frac{c^2}{g} \sinh \frac{g}{c} \tau$$

Bueno! Ya tenemos los cálculos teóricos para el viaje de Pedro. Supongamos que planeamos el viaje de modo que dentro del cohete transcurran 40 años. Esto es: $\tau = 40$ años. pasándolo a segundos: $\tau \approx 1.26 \times 10^9$ s.

de (2.4b) obtenemos el tiempo de viaje de Pablo desde el punto de vista de Pedro:

$$(2.5) \quad t = \frac{x^0}{c} = \frac{c}{g} \sinh \frac{g}{c} (1.26 \times 10^9 \text{ seg}) \approx 2.74 \times 10^{25} \text{ s} \approx 8.6 \times 10^{17} \text{ años.}$$

Esta cantidad es algo mas grande que la edad del universo, ahora calculemos la distancia recorrida por el cohete mediante (23b).

$$(26) \quad x' = \frac{c^2}{g} (\cosh \frac{g}{c} \tau - 1) = 8.2 \times 10^{33} \text{ m} \approx 8.7 \times 10^{17} \text{ años-luz.}$$

Pero el universo observable es de tan solo 8×10^{10} años-luz.

PEDRO SE HABRIA SALIDO DEL UNIVERSO OBSERVABLE!!

Consideremos que no debemos realizar tal viaje, puesto que no volveriamos a saber mas de la suerte de Pedro y no podriamos predecirla.

Planeemos el viaje a tan solo el centro de la galaxia. Esto es, $d = 3.16 \times 10^{20}$ m. Supongamos que la nave acelera hasta llegar a mitad de trayecto, luego desacelera para llegar al reposo al centro de la galaxia. Se devuelve y hace lo mismo para llegar a la Tierra. calculemos el tiempo que mide Pablo hasta la mitad de trayecto: ($x' = d/2$).

$$(27) \quad \tau = \frac{c}{g} \cosh^{-1} \left(\frac{gx'}{c^2} + 1 \right) \approx 3.14 \times 10^8 \approx 10 \text{ años.}$$

Para la segunda parte, tendremos igualmente lo mismo entonces $T_{ida} = 20$ años. Suponiendo que las aceleraciones del viaje de regreso es la misma que la del viaje de ida, tendremos que:

$$(28) \quad T = T_{ida} + T_{regreso} \approx 40 \text{ años.}$$

Ahora usamos (23b) para hallar el tiempo transcurrido para Pablo durante el viaje:

$$(29) \quad t = 2t_{ida} = 4 \frac{c}{g} \sinh \frac{g}{c} (3.14 \times 10^8 \text{ s}) \approx 4.2 \times 10^{12} \text{ s} \approx 130.000 \text{ años.}$$

Esto significa que si bien Pedro estará en sus cuarenta, Pablo y todos los suyos habrán perecido. Tal vez encuentre en su hogar una civilización humana muy desarrollada, o tal vez no la encuentre, y solo arribe a un planeta árido y sombrío.

Pero, ¿que ha sucedido? Durante tal viaje, los relojes de Pablo parecen atrasarse, sus latidos son mas lentos y sus pensamientos van mas despacio, todo va mas lento desde el punto de vista de Pedro. ¡Por supuesto, Pedro no nota nada fuera de lo común! excepto en el momento de llegar a su punto de partida! es una de las consecuencias de la teoría especial de la relatividad.

Se podría pensar que esto es una paradoja: ¿Acaso no podemos tomar el punto de observación de Pablo? Para el

es la tierra, y no su cohete, la que acelera y luego regresa a él y por lo tanto es Pedro, que 'viaja' con la tierra, el que envejece más lentamente. Por simetría entre los dos sistemas debieran tener la misma edad cuando se encuentren.

El problema en esta suposición es que estamos adoptando un punto de vista desde un sistema no inercial de referencia, como lo es el cohete, y la relatividad especial no nos garantiza nada para sistemas de referencia acelerados.

Dinámica relativista.

4.5 Cuadrimomentum:

El cuadrimomentum de una partícula está definido por:

$$(33) \quad P^\nu = m_0 U^\nu$$

donde U^ν es su cuadri-velocidad y m_0 es la masa propia de la partícula, la cual es un escalar de Lorentz.

El cuadrimomentum es una cantidad que se conserva. Consideremos, por ejemplo, dos partículas con cuadrimomentos P_1^ν y P_2^ν , de la forma que adquieren nuevos cuadrimomentos P_3^ν y P_4^ν . La ley de conservación para este caso se enuncia así:

$$(34) \quad P_1^\nu + P_2^\nu = P_3^\nu + P_4^\nu$$

En general, en un sistema de n partículas tendremos que:

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n P_i^\nu = \text{constante.}$$

A partir de esta ley de conservación, construiremos la mecánica relativista y tendremos que al hacer tender v/c a cero obtendremos la mecánica newtoniana.

Ahora daremos un significado físico al cuadrimomentum. Tenemos que $U^\nu = \gamma(v)(c, \vec{v})$, entonces:

$$(36) \quad P^\nu = \gamma(v)(m_0 c, m_0 \vec{v}) = (P^0, \vec{P}).$$

$$\text{expandiendo } \gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

tomando $v/c \rightarrow 0$ tendremos que

$$(37) \quad cP^0 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$(38) \quad \vec{P} \approx m_0 \vec{v}$$

Vemos que el primer término está asociada a la energía de la partícula, pero aparece un término nuevo que le asocia energía a la partícula por el solo hecho de tener masa. a este término lo denominaremos energía en reposo:

$$(39) \quad E_0 = m_0 c^2.$$

La energía total será entonces la suma de la energía en reposo y la energía cinética.

En dinámica relativista definimos la masa inercial de una partícula como sigue:

$$(40) \quad m = \gamma(v) m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De esta forma, el cuadrimomentum puede ser escrito de la forma:

$$(41) \quad p^\nu = \left(\frac{mc^2}{c}, m\vec{v} \right) = (p_0, \vec{p})$$

Llamamos el término $p_0 c$ la energía total de la partícula y el segundo término el momentum, entonces:

$$(42) \quad p^\nu = (E/c, \vec{p}) \quad E = mc^2 \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad m = \gamma(v) m_0$$

Analicemos cada una de estas ecuaciones. En primer lugar, la relatividad desmiente el principio de la conservación de la masa, esta pasa a jugar el papel de una nueva forma de energía. No podemos hablar de la conservación de la materia, pero si de la conservación de la masa-energía.

Ahora definamos la energía cinética como la diferencia entre la energía total y la energía en reposo:

$$(43) \quad E = E_0 + K \quad K = mc^2 - m_0 c^2 = (\gamma(v) m_0 - m_0) c^2$$

Esto es, la energía cinética es proporcional al exceso de masa. Podemos decir, entonces, que la energía cinética de un cuerpo se conserva siempre y cuando no cambie su masa en reposo.

Transformación del momentum y la energía.

Siendo p^ν un cuadvectores, lo podemos transformar, con una transformación de Lorentz, supongamos que en un sistema S el cuadvimomentum está dado por $p^\nu = (p_0, \vec{p}) = (E/c, \vec{p})$ y en otro sistema S' moviéndose con velocidad V a lo largo del eje x^1 , la transformación de Lorentz estará dada por:

$$(44) \quad p'^\nu = \Lambda^\nu_\mu p^\mu \quad \text{con } p'^\nu = (p'_0, \vec{p}') = (E'/c, \vec{p}')$$

donde Λ estará dado por III(2.2) entonces:

$$(45) \quad \begin{pmatrix} p'^0 \\ p'^1 \\ p'^2 \\ p'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{V}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos la transformaciones de Lorentz para Energía y cantidad de Movimiento:

$$\begin{aligned}
 E &= \gamma (E' - v p'_x) & E' &= \gamma (E + v p_x) \\
 (46) \quad p_x &= \gamma (p'_x - \frac{v}{c^2} E') & p'_x &= \gamma (p_x + \frac{v}{c^2} E) \\
 p_y &= p'_y & p_y &= p'_y \\
 p_z &= p'_z & p_z &= p'_z
 \end{aligned}
 \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

4.6 Ley de la Dinámica

La segunda ley de Newton nos dice que:

$$(47) \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{o} \quad \vec{F} = m \vec{a}$$

Por lo que resulta natural definir la cuadripotencia como sigue:

$$(48) \quad f^\nu = \frac{dP^\nu}{d\tau} \quad \text{o} \quad f^\nu = m_0 a^\nu$$

llamaremos como fuerza física la variación del momentum respecto al tiempo, esto es, la que aparece en la primera parte de (47).

Podemos escribir la cuadripotencia en términos de la energía y el momentum de la partícula:

$$f^\nu = \frac{d}{d\tau} (P^0, \vec{P}) = \frac{d}{d\tau} (E/c, \vec{P}) = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (E/c, \vec{P})$$

entonces

$$(49) \quad f^\nu = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \frac{d\vec{P}}{dt} \right) = (f^0, \vec{F}) \gamma(\beta)$$

En el primer término está involucrada la potencia, y el segundo término corresponde a la segunda ley de Newton con la corrección relativista. En ella la masa deja de ser una constante, por lo que no se puede sacar de la derivada como tal.

En mecánica newtoniana relacionamos la potencia, la fuerza y la velocidad de la siguiente forma:

$$(40) \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

En mecánica relativista también es válida la siguiente relación, como veremos:

Primero demostramos que la cuadripuerza es ortogonal a la cuadrivelocity. del teorema 4.3.1 $v \cdot a = 0$. por lo tanto

$$(50) \quad f \cdot U = m_0(a \cdot U) = 0.$$

entonces,

$$f^\nu U_\nu = \frac{\gamma(\theta)}{c} \frac{dE}{dt} \gamma(\theta) \vec{F} \cdot (\gamma(\theta) c, \gamma(\theta) \vec{v}) = \gamma^2(\theta) \frac{dE}{dt} - \gamma^2(\theta) \vec{F} \cdot \vec{v} = 0.$$

de donde obtenemos la expresión (49).

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Esto nos permite escribir la cuadripuerza de la siguiente manera.

$$(51) \quad f^\nu = \left(\frac{1}{c} \vec{F} \cdot \vec{v}, \vec{F} \right) \gamma(\theta).$$

Transformación de Lorentz para las fuerzas.

Tomemos un sistema de referencia S con cuadripuerza $f^\nu = (W/c, F_x, F_y, F_z) \gamma(\theta)$ y otro sistema S' con velocidad respecto a S de V a lo largo del eje X^1 . Con cuadripuerza $f'^\nu = (W'/c, F'_x, F'_y, F'_z) \gamma(\theta')$ dE'/dt' y $W' = dE'/dt'$. Entonces, la transformación de Lorentz estará dada por.

$f'^\nu = \Lambda^\nu_\mu f^\mu$ entonces, llamando $Y = \gamma(V)$, $Y_1 = \gamma(\theta')$ y $Y_0 = \gamma(\theta)$.

$$(52) \quad \begin{pmatrix} Y_0 W'/c \\ Y_1 F'_x \\ Y_1 F'_y \\ Y_1 F'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & -\frac{V}{c} Y & 0 & 0 \\ -\frac{V}{c} Y & Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 W/c \\ Y_0 F_x \\ Y_0 F_y \\ Y_0 F_z \end{pmatrix}$$

Puesto que esta ecuación matricial es idéntica a (6), tendrán la misma solución, reemplazando V_i por F_i y cY por $cY'(W'/c)$.

$$(53) \quad F'_x = \frac{F_x - (V/c^2) W}{1 - V F_x / c^2} = \frac{F_x - (V/c^2) \vec{F} \cdot \vec{v}}{1 - V F_x / c^2}$$

$$F'_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V F_x / c^2} F_y \quad F'_z = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V F_x / c^2} F_z$$

Usemos la relación (7) para escribir la componente de la potencia:

$$(54) \quad W' = \vec{F}' \cdot \vec{v}' = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{v}) - V F_x}{1 - V F_x / c^2}$$

4.7 Relación entre la fuerza y la aceleración:

En su segunda ley Newton planteó que la fuerza era proporcional a la aceleración y, por lo tanto, ambas cantidades vectoriales tenían la misma dirección. En el electromagnetismo se encontró que en ciertos casos la fuerza tenía una dirección diferente a la aceleración y la relatividad especial logró demostrar que esto en general no es cierto. Por lo tanto, las dos ecuaciones de (4.1) son incompatibles, siendo solo cierta la primera con \vec{p} redefinida por $\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ entonces:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{dE}{dt}$$

entonces:

$$\vec{F} = m\vec{a} + \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2} \vec{v}$$

4.8 Colisiones.

El estudio de la mecánica relativista adquiere gran importancia en la física de partículas atómicas y nucleares, pues en ellas intervienen velocidades que no son despreciables frente a la de la luz.

Para la solución de este tipo de problemas contaremos con dos principios muy importantes. El primero corresponde a la conservación del momento y el segundo, el cual es tal vez más relevante, se refiere a la conservación de la masa-energía.

Puesto que la masa en reposo es algo característico de las partículas y el principio de equivalencia masa-energía plantea que esta, o parte de esta, se convierta en otras formas de energía, es posible que después de una colisión, (esto es, una interacción fuerte entre partículas) las partículas resultantes no sean las mismas que las que interactuaron.

Es posible, igualmente, que parte de la masa de las partículas, (nunca se convierta en energía radiante, o, reciprocamente, la radiación de origen a la formación de materia. Pero antes de considerar esto, debemos darle lugar a un tipo de partículas muy especial: los fotones.

4.8.1. Fotones:

• El cuadrimomento de una partícula está dada por:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (\gamma(v)(m_0 c^2)/c, \gamma(v)m_0 \vec{v}) = (E/c, m\vec{v}).$$

Ahora refiriéndonos a un sistema de referencia instantáneamente en reposo respecto a la partícula, tendremos que:

$$p^\mu = (p^0, 0) = (m_0 c^2, 0) = (E_0/c, 0).$$

Siendo la norma del cuadrimomento un invariante, podemos igualarlas a las dos ecuaciones:

$$(62) \quad p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - p^2 = E_0^2/c^2 \quad E_0 = m_0 c^2 \quad p = |\vec{p}|$$

esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$(63) \quad E^2 - E_0^2 = c^2 p^2$$

Definamos como fotones aquellas partículas con masa en reposo cero. esto significa que ellos no tienen energía en reposo y por lo tanto:

$$(64) \quad E = cp$$

Para tales partículas tendremos entonces que $p^2 = 0$, esto es, su cuadrimomentum es un vector tipo luz.

• Por otro lado, la ecuación de ondas electromagnéticas planas está dada por:

$$(65) \quad \psi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (\text{el término } A \text{ no nos interesa por el momento}).$$

el primer postulado de relatividad nos exige que la fase debe ser la misma en todos los sistemas de referencia, esto es:

$$(66) \quad \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{x}'$$

pero tenemos que $x^\nu = (ct, \vec{x})$ y por lo tanto, de la relación anterior resulta natural definir el cuadrivector K^ν como sigue

$$(67) \quad K^\nu = (k^0, \vec{k}) = (\omega/c, \vec{k}).$$

de esta manera se interpreta la invarianza de la fase como la invarianza evidente del producto escalar de cuadrivectores $K \cdot X$.

De la invarianza de K^2 obtenemos la llamada relación de dispersión para la ecuación de ondas planas:

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - |\vec{k}|^2.$$

Uniendo las dos ecuaciones obtenemos que:

$$(70) \quad \frac{\omega^2}{c^2} = |\vec{k}|^2 \Rightarrow c = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \lambda\nu.$$

• Hipótesis de Plank

Uno de los mas grandes pasos dados a la solución de problemas tales como la radiación del cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico fue dado por Plank con su hipótesis de la cuantización de la energía:

La radiación electromagnética manifiesta propiedades corpusculares en donde la energía está cuantizada, cada cuanto de energía se llama fotón y porta una cantidad de energía igual a:

$$(71) \quad E = h\nu \quad h = \text{constante de Plank} =$$

donde ν es la frecuencia del campo electromagnético.

Usaremos los resultados obtenidos en (6.4), (70) y (71) para expresar la energía y momentum de un fotón en términos de su frecuencia angular ω y su número de onda k .

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega \quad \text{con } \hbar = h/2\pi$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k$$

Ahora \vec{p} tendrá la misma dirección de la dirección de propagación de la onda \vec{k} , por lo tanto:

$$(72) \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \text{momentum del fotón}$$

$$(73) \quad E = \hbar\omega \quad \text{energía del fotón}$$

4.8.2 Colisión elástica

En relatividad especial entendemos por colisión elástica aquella en donde la masas individuales de las partículas (masas en reposo) se conserva. La definición clásica de colisión elástica se refiere a la conservación de la energía cinética.

4.8.21 Teorema: Si p_1 y p_2 son los cuadrimomentos de dos partículas de masas m_{01} y m_{02} , entonces $p_1 \cdot p_2 = m_{02} m_{01} \gamma(v) c^2$ donde v es la velocidad relativa entre las dos partículas.

Demostración:

Tomemos un sistema de referencia en donde la partícula 1 está en reposo, entonces, la velocidad de 2 corresponderá a la velocidad relativa:

$$p_1 = (m_{01} c, \vec{0})$$

$$p_2 = (m_{02} \gamma(v), m_{02} \gamma(v) \vec{v})$$

$$\Rightarrow (74) \quad p_1 \cdot p_2 = m_{01} m_{02} \gamma(v) c^2$$

4.8.22 Teorema: Si dos partículas colisionan elásticamente, entonces la velocidad relativa antes de la colisión es la misma que la velocidad relativa después de la colisión.

Demostración:

Tomemos p_1 y q_1 las cuadrimomentos de las partículas antes de la colisión y p_2 y q_2 las cuadrimomentos correspondientes después de la colisión, entonces,

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \Rightarrow (p_1 + q_1)^2 = (p_2 + q_2)^2 \Rightarrow p_1^2 + 2p_1 \cdot q_1 + q_1^2 = p_2^2 + 2p_2 \cdot q_2 + q_2^2$$

Por otro lado $p_1^2 = m_{01}^2 c^2 = p_2^2$ y $q_1^2 = m_{02}^2 c^2 = q_2^2$, pues las masas se conservan, esto significa que:

$$2 p_1 \cdot q_1 = 2 p_2 \cdot q_2 \Rightarrow 2 m_{01} m_{02} \gamma(v_{\text{antes}}) c^2 = 2 m_{01} m_{02} \gamma(v_{\text{después}}) c^2$$

entonces $v_{\text{antes}} = v_{\text{después}}$.

4.8.3 Colisión inelástica:

la colisión inelástica toma lugar cuando las partículas después de la colisión dan lugar a una sola partícula.

Consideremos el ejemplo mas sencillo de colisión inelástica. supongamos dos partículas con la misma masa m_0 acercándose con velocidades idénticas \vec{v} ; las cuales al colisionar dan lugar a una sola partícula de masa M_0 . Por conservación del momento, esta partícula debe quedar en reposo, pero, en vista de que las partículas que colisionan pierden su energía cinética, la masa resultante debe ser mayor que las sumas de las masas iniciales.

La energía total de las partículas estará dada por:

$$(75) \quad E_{Ti} = 2\gamma(v)m_0c^2.$$

El momentum total será.

$$(76) \quad \vec{P}_{Ti} = (m_0\gamma(v)\vec{v} - m_0\gamma(v)\vec{v}, 0, 0) \\ = (0, 0, 0).$$

La energía y el momentum finales serán:

$$(77) \quad E_{Tf} = M_0c^2 \quad P_{Tf} = \vec{0}$$

Por conservación de la energía tendremos que

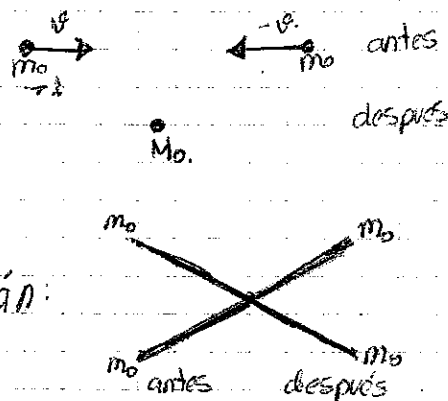
$$(78) \quad E_{Ti} = 2\gamma(v)m_0c^2 = M_0c^2 = E_{Tf}.$$

entonces

$$(79) \quad M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 2m_0.$$

Recordando que la energía cinética es la diferencia entre la energía total y la energía en reposo, tendremos que.

$$(80) \quad H_{Ti} = 2m_0c^2(\gamma(v) - 1) \\ H_{Tf} = M_0c^2 - M_0c^2 = 0.$$



* En este problema no hacemos ningún cambio de sistema de referencia.

4.8.4 Absorción y emisión de fotones

4.8.4.1 Absorción de un fotón por un átomo.

Consideremos un átomo con masa M_0 que es alcanzada por un fotón de energía Q y es completamente absorbido. Es de esperarse que la partícula pase del estado en reposo al de movimiento y su masa se altere.

De la conservación de energía tendremos que:

$$(81) \quad Q + M_0 c^2 = M_0' c^2 \gamma(v)$$

$$(82) \quad Q/c = M_0' \gamma(v) v$$

$$\text{de (81)} \quad M_0' \gamma(v) = Q + M_0 c^2 / c^2$$

$$\text{de (82)} \quad Q/c = (Q + M_0 c^2 / c^2) v$$

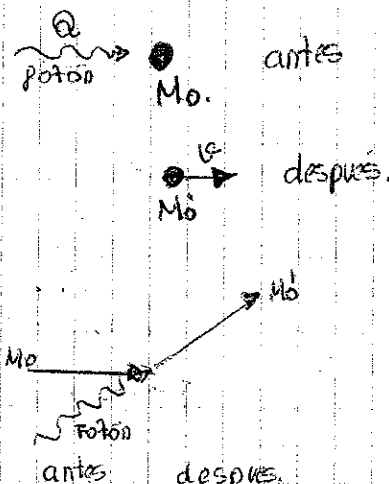
entonces

$$(83) \quad v/c = \frac{Q}{Q + M_0 c^2}$$

Reemplazando esto en (82) tendremos:

$$M_0' = \frac{Q}{v c \gamma(v)} = \frac{Q}{c} \frac{Q + M_0 c^2}{Q c} \sqrt{1 + \frac{Q^2}{(Q + M_0 c^2)^2}}$$

$$(84) \quad = \sqrt{\frac{(Q + M_0 c^2)^2}{c^4} + \frac{Q^2}{c^4}} \Rightarrow M_0' = \sqrt{M_0^2 c^2 + \frac{2 Q M_0}{c^2}} > M_0$$



4.8.4.2. Emisión de un fotón de un átomo:

Supongamos que un átomo en reposo emite "espontáneamente" un fotón. Entonces el átomo experimentará un retroceso y su masa pasará de un valor M_0 a un valor M_0' .

Por conservación de la energía

$$(85) \quad M_0 c^2 = M_0' c^2 \gamma(v) + Q$$

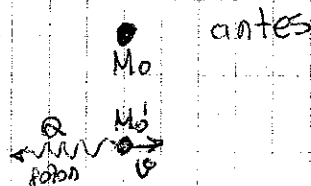
$$(86) \quad 0 = M_0' \gamma(v) v - Q/c$$

$$\text{de (86) tenemos que } M_0' \gamma(v) = Q/c$$

$$\text{reemplazando en (85)} \quad M_0 c^2 - Q = Q c / v$$

entonces

$$(87) \quad v/c = \frac{Q}{M_0 c^2 - Q}$$



Reemplazando este resultado en (86) tenemos que:

$$(88) \quad M_0 = \sqrt{M_0^2 - \frac{2M_0 Q}{c^2}} < M_0$$

4.8.5 El efecto Mossbauer.

Si el átomo al emitir el fotón no retrocediera, el fotón alcanzaría una energía igual a la diferencia de sus energías en reposo.

$$(89) \quad Q_0 = M_0 c^2 - M_0' c^2 = \hbar \nu.$$

No obstante, la energía es algo menor debido al retroceso que sufre el átomo al emitir. veamos cual es este retroceso.

de acuerdo a la ecuación (62).

$$E_0^2 = E'^2 - (p'c)^2.$$

Esto es:

$$M_0' c^2 = \sqrt{(M_0 c^2)^2 - (M_0' v)^2 c^2}.$$

De acuerdo a las ecuaciones (85) y (86) tenemos que:

$$(M_0' c^2)^2 = (M_0 c^2 - Q)^2 - Q^2 = (M_0 c^2)^2 - 2M_0 c^2 Q$$

de la ecuación (89) tenemos que $(M_0' c^2)^2 = Q_0^2 - 2M_0 c^2 Q_0 + (M_0 c^2)^2$
igualando estas dos ecuaciones obtenemos

$$(M_0 c^2)^2 - 2M_0 c^2 Q = Q_0^2 - 2M_0 c^2 Q_0 + (M_0 c^2)^2.$$

Despejando Q obtenemos finalmente que:

$$(90) \quad Q = Q_0 \left(1 - \frac{Q_0}{2M_0 c^2} \right)$$

El segundo término de la derecha es el llamado factor de retroceso, y se anula para $M_0 \rightarrow \infty$,

Dicho factor también se puede suprimir por completo en los átomos de una red cristalina, este notable efecto es conocido como efecto Mossbauer.