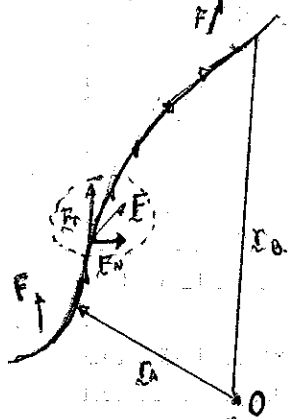


Trabajo:



$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F dr \cos \theta.$$

Fuerza resultante: $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ entonces

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (\sum \mathbf{F}_i) \cdot d\mathbf{r} = \sum \int_A^B \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}.$$

El trabajo que hace la fuerza resultante para llevar el cuerpo de A hasta B es igual a la suma de todos los trabajos de las fuerzas individuales. Esto no sucede con la energía cinética.

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) = \int_A^B F_x dx + F_y dy.$$

Solo hace trabajo la fuerza tangencial, por ser paralela al desplazamiento.

Potencia: es la rapidez con la cual se hace trabajo.

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Unidades de Trabajo y Potencia

$$[W] = [K] = [F][d].$$

$$[P] = [W]/[t].$$

Sistema métrico.

$$SI \quad N \cdot m = J.$$

$$cgs \quad \text{din} \cdot \text{cm} = \text{ergio}.$$

$$\text{ingles} \quad \text{poundal} \cdot \text{pie}$$

$$1 \text{ Julio} = 10^7 \text{ Ergios}.$$

Sistema gravitacional

$$MKS \quad \text{kgf} \cdot \text{m} = \text{Kilogrametro}$$

$$cgs \quad \text{grf} \cdot \text{cm}$$

$$\text{Britanico} \quad \text{lb} \cdot \text{pie}.$$

$$1 \text{ lb} \cdot \text{pie} \text{ es } 1.356 \text{ Julios}.$$

$$1 \text{ Caloría} = 4.184 \text{ Julios}.$$

$$BTU = 1.055 \text{ Julios}.$$

$$eV = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Julios: energía que gana } 1e \text{ al atravesar una región con } V=1 \text{ voltio}.$$

$$KW \cdot h = 3.6 \times 10^6 \text{ J. Trabajo realizado por un kilowatio en una hora}.$$

$$\text{Potencia: SI} \quad J s^{-1} = 1 W$$

$$\text{Sist. Grav. MKS: } 75 \text{ kgf} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ caballo de vapor: CV}.$$

$$\text{Britanico: } 150 \text{ lb} \cdot \text{s/s} = 1 \text{ hp (horse power)} = 1.014 \text{ CV} = 746 W$$

Energía y Trabajo

Teorema del Trabajo y la energía

Al resolver la ecuación fundamental de la dinámica de una partícula podríamos resolver la primera integral si conociéramos la fuerza en función del tiempo:

$$F = \frac{dp}{dt} \rightarrow \int_{p_0}^p dp = \int_{t_0}^t F dt \rightarrow p - p_0 = \int_{t_0}^t F dt = I$$

el cambio de momento de una partícula es igual al impulso.

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t I dt$$

Sin embargo, en los problemas importantes que surgen en la física la fuerza no se conoce en función del tiempo, sino en función de la posición. Para resolver este problema es necesario realizar un cambio de variable; en una dimensión:

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad \text{multiplicamos a ambos lados por } dx$$

$$F dx = m v dv, \text{ integramos, } \int_{x_A}^{x_B} F dx = m \int_{v_A}^{v_B} v dv = \frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = K_B - K_A$$

$$a \int_{x_A}^{x_B} F dx = W_{x_A \rightarrow x_B} \text{ lo llamamos trabajo y a}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \text{ lo definimos energía cinética.}$$

Generalizando a una forma escalar:

$$F(x) = \frac{dL}{dt} \quad \text{multiplicamos escalarmente por } dL \text{ e integramos}$$
$$\int_{x_A}^{x_B} F \cdot dx = \frac{1}{m} \int_{p_A}^{p_B} p dp \quad L dL = \frac{1}{2} (p \cdot L) = \frac{1}{2} dp^2$$

$$= \frac{1}{2m} \int_{p_A}^{p_B} dp^2 = \frac{p_B^2}{2m} - \frac{p_A^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_B^2 - p_A^2) \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\int_{x_A}^{x_B} F \cdot dx = W_{x_A \rightarrow x_B} \quad \text{y } K = \frac{p^2}{2m} \text{ entonces tenemos que}$$

$$W_{x_A \rightarrow x_B} = K_B - K_A$$

Relacion entre velocidad angular y momentum angular.

$$L = \underline{r} \times \underline{p} = m \underline{r} \times \underline{v} = m r \omega (\underline{v} \times \underline{r})$$

$$(*) (\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \underline{B} - (\underline{B} \cdot \underline{C}) \underline{A} \quad \underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C}$$

$$L = m r^2 \underline{\omega} - m r \omega \underline{r} = m r^2 \underline{\omega} - m (r \cdot \underline{\omega}) \underline{r} = m r^2 \underline{\omega} - m (r \cdot \underline{\omega}) \underline{r}$$

$$\underline{L} = m r^2 \underline{\omega}$$

Momentum Angular

El momentum angular con respecto a O de una partícula de masa m y con una velocidad \vec{v} (y por lo tanto con una cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$) se define como el producto vectorial:

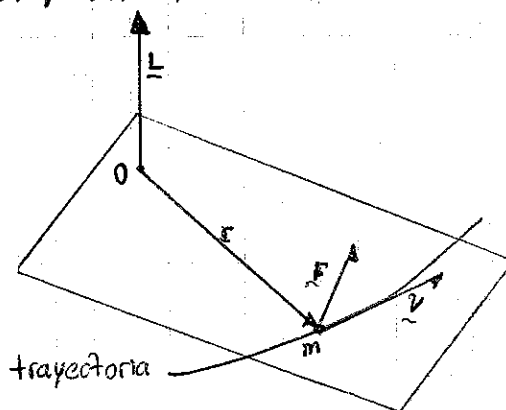
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Si derivamos \vec{L} obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Entonces, se define como torque o momento de la fuerza. La variación del momentum angular en el tiempo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \quad \equiv \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{F}$$



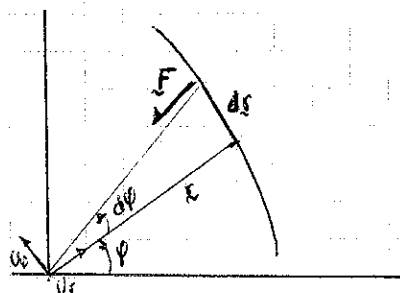
$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{v}_r \times \vec{v}_\theta) = m\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt} = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Fuerzas Centrales:

Si el torque aplicado a una partícula es cero, entonces \vec{L} es un vector constante. Esta condición se satisface si:

- 1) $\vec{F} = 0$ La partícula es libre.
- 2) $\vec{F} \parallel \vec{r}$ La fuerza siempre está orientada al origen del sistema de referencia, la cual se les denominan Fuerzas centrales.

Cuando una fuerza es central, el momentum angular con respecto al centro de la fuerza es una constante del movimiento y viceversa.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = c$$

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \rightarrow \vec{p} = m\dot{r} \vec{u}_r + m r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{r} \times \vec{p} = m\dot{r} \vec{u}_r \times (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$$

El movimiento producido por una fuerza central está confinado a un plano.

El área barrida por el radio vector se puede calcular como sigue:

$$dA = \frac{1}{2} r dr; \quad dr = r d\theta \rightarrow dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \rightarrow \vec{L} = 2m \frac{dA}{dt} = cte$$

Entonces el vector barre áreas iguales en tiempos iguales.

$$(8) x = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

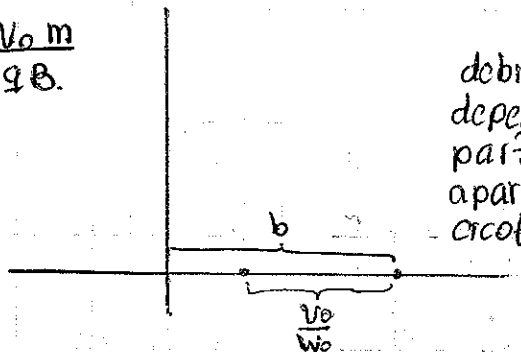
$$(9a) y - (b - \frac{V_0}{\omega_0}) = \frac{V_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t$$

Al elevar ambos
al cuadrado
y sumarlos.

$$x^2 + \left[y - (b - \frac{V_0}{\omega_0}) \right]^2 = \frac{V_0^2}{\omega_0^2}$$

Obtenemos la ecuación de un círculo con centro en $b - \frac{V_0}{\omega_0}$ y radio $\frac{V_0}{\omega_0}$.

$$= \frac{V_0 m}{qB}$$



debido a que el radio de este movimiento depende de la carga y de la masa de la partícula, este principio se utiliza en aparatos como el espectrógrafo de masas, ciclotrón y seleccionador de cargas.

$$q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = m \mathbf{a}$$

$$q [v_x \hat{i} + v_y \hat{j}] \times B \hat{k} = m \mathbf{a}$$

$$q [v_x B \hat{j} + v_y B \hat{i}] = m \frac{d v_x}{dt} \hat{i} + m \frac{d v_y}{dt} \hat{j} \quad \text{obtenemos dos ecuaciones}$$

$$(1) -q v_x B = m \frac{d v_y}{dt} \quad \text{Constituyen un sistema de ecuaciones. } 2 \times 2.$$

$$(2) q v_y B = m \frac{d v_x}{dt}$$

$$\frac{d(1)}{dt} \rightarrow -qB \frac{d v_x}{dt} = m \frac{d^2 v_y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d v_x}{dt} = -\frac{m}{qB} \frac{d^2 v_y}{dt^2} \quad \text{reemplazamos en (2).}$$

$$q v_y B = -\frac{m^2}{qB} \frac{d^2 v_y}{dt^2} \Rightarrow \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y + \ddot{v}_y = 0 \Rightarrow v_y = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d(2)}{dt} = qB \frac{d v_y}{dt} = m \frac{d^2 v_x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d v_y}{dt} = \frac{m}{qB} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \quad \text{reemplazamos en (1)}$$

$$-q v_x B = \frac{m^2}{qB} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \Rightarrow \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x + \ddot{v}_x = 0 \Rightarrow v_x = A \cos(\omega t + \delta).$$

$$\text{En } t=0 \quad v_y=0 \quad v_x=v_0 \quad y_0=b \quad x_0=0. \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

$$v_{y0} = A \sin \delta = 0 \rightarrow \sin \delta = 0 \rightarrow \delta = 0.$$

$$v_y = A \sin \omega t \rightarrow y = -\frac{A}{\omega} \cos \omega t + C \quad \text{en } t=0 \quad y_0 = -\frac{A}{\omega} + C \rightarrow$$

$$(3) \quad y = y_0 + \frac{A}{\omega} - \frac{A}{\omega} \cos \omega t$$

En (1) tenemos que:

$$v_x = -\frac{m}{qB} \frac{d v_y}{dt} = -\frac{m}{qB} A \omega \cos \omega t = v_x = -A \cos \omega t \quad (4).$$

$$x = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t + C_2 \quad C_2 = 0 \rightarrow x = -\frac{A}{\omega} \sin \omega t \quad (5)$$

Para hallar A en 4 ($t=0$) entonces $v_0 = -A \cos 0 = -A$. obtenemos que.

$$(6) \quad v_x = v_0 \cos \omega t \quad (8) \quad x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$(7) \quad v_y = -v_0 \sin \omega t \quad (9) \quad y = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + b_0 = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega}$$

Es la superposición de dos movimientos armónicos simples desfasados en $\pi/2$.

$$d\mathbf{r} = r d\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} = |d\mathbf{r}| \rightarrow d\mathbf{r} = r d\varphi \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow d\mathbf{r} = d\varphi \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

Dividimos por dt : $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{n} \times \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v} = \omega \mathbf{n} \times \mathbf{r}$

Si definimos $\omega = \omega \hat{\mathbf{n}}$ podemos definir el vector velocidad de la partícula como:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Nota: no podemos definir $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{n}}$. esta definición solo funciona para ángulos infinitesimales, en donde se pueden comparar con vectores

$$d\mathbf{r} = d\varphi \hat{\mathbf{n}} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Aceleración: prod. vector. y velocidad:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Fuerza de Lorentz: campo eléctrico y magnético.

La fuerza que experimenta una carga q sobre un campo eléctrico es:

(1) $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ donde \mathbf{E} es el campo eléctrico.

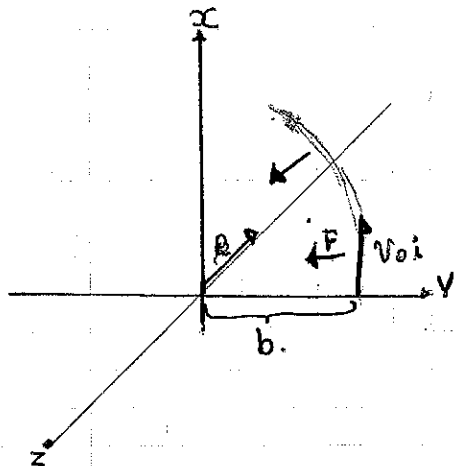
La fuerza que actúa sobre una carga q que se mueve en un campo magnético \mathbf{B} esta dada por la ecuación:

(2) $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Una partícula cargada eléctricamente y con una masa m ingresa con una velocidad de $v_0 \hat{\mathbf{i}}$ a una región donde hay un campo magnético \mathbf{B} uniforme a lo largo del eje z .

(3) $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$

Se busca encontrar la trayectoria que describe la partícula.



$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

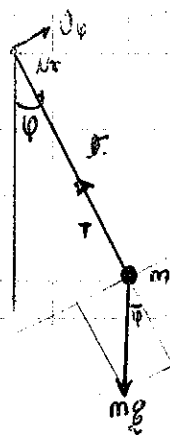
La trayectoria se curva hacia $-\hat{\mathbf{j}}$

\mathbf{B} está orientado hacia $\hat{\mathbf{k}}$

v_0 está orientado hacia $\hat{\mathbf{i}}$

Entonces \mathbf{F} se orienta hacia $-\hat{\mathbf{j}}$

Ejemplo 27: Pendulo



$$T + mg \cos \varphi = m a_r$$

$$-T + mg \cos \varphi = m r \omega^2$$

$$-T + mg \cos \varphi = m r \omega^2$$

$$-T + mg \cos \varphi = m r \omega^2$$

$$(1) -T + mg \cos \varphi = m r \omega^2$$

$$(2) -mg \sin \varphi = m r \alpha$$

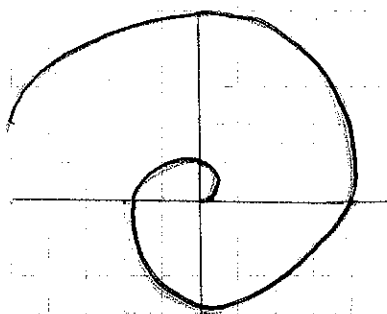
$$(2) \ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0$$

Para ángulos pequeños: $\sin \varphi \sim \varphi$. la ecuación

queda $\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \varphi = 0$ ecuación del oscilador armónico simple. con:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta) \quad \text{con } \omega_0^2 = g/l.$$

Ejemplo 28. Un mosco se mueva alrededor de un rayo de una rueda a una velocidad de 1 m/s. la rueda gira con una rapidez angular constante. encontrar la velocidad del mosco y la aceleración en tres segundos si $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$.



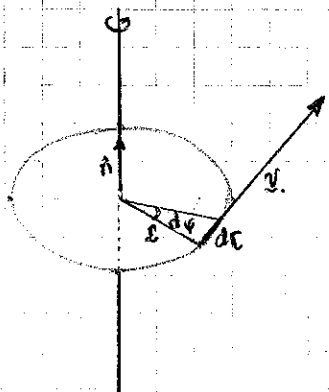
Movimiento descrito por el insecto.

$$\mathbf{r} = r \mathbf{U}_r \quad t=3 \Rightarrow \mathbf{r} = 3 \mathbf{U}_r \text{ cms.}$$

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{U}_r + r \omega \mathbf{U}_\varphi \quad \mathbf{v}(3) = 1 \frac{m}{s} \mathbf{U}_r + 3 \frac{m}{s} \mathbf{U}_\varphi$$

$$\mathbf{a} = -r \omega^2 \mathbf{U}_r + 2 v_r \omega \mathbf{U}_\varphi = -3 \frac{m}{s^2} \mathbf{U}_r + 2 \frac{m}{s^2} \mathbf{U}_\varphi$$

Rapidez y velocidad angular.



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad v = \omega r$$

\hat{n} es un vector unitario a lo largo del eje de rotación:

$$\hat{n} \times \mathbf{r} \parallel d\mathbf{s} \parallel \mathbf{v}$$

$d\mathbf{r} = r d\varphi$ (el ángulo definido en radianes es el arco sobre el radio).

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{U}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \hat{U}_\varphi + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \hat{U}_\varphi + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \hat{U}_\varphi - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \hat{U}_r$$

$$= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \hat{U}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right] \hat{U}_\varphi \quad (8)$$

Si denotamos $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$ como rapidez angular y $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$, entonces.
 $v_r = \dot{r}$ (velocidad radial) (2), (7) y (8)
 Nos queda.

(9) $\vec{r} = r \hat{U}_r$

(10) $\vec{v} = \dot{r} \hat{U}_r + r \omega \hat{U}_\varphi$ (a) velocidad radial (b) velocidad tangencial o azimutal.

(11) $a = [\ddot{r} - r\omega^2] \hat{U}_r + [2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}] \hat{U}_\varphi$ (a) aceleración radial (b) aceleración centrípeta.

(12) $F = m[\ddot{r} - r\omega^2] \hat{U}_r + m[2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}] \hat{U}_\varphi$ (c) Aceleración de Coriolis (d) aceleración lineal transversal.

Movimiento circular: r constante

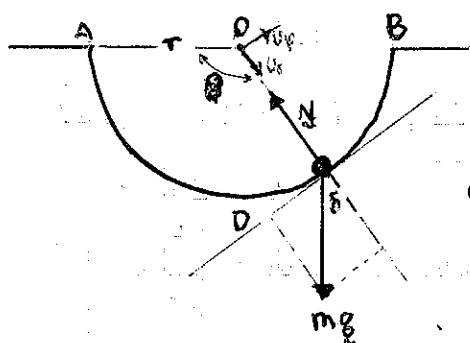
(9a) $\vec{r} = r \hat{U}_r$

Obtenemos la ecuación del movimiento circular mas general, en donde (en este caso) $U_r = U_\varphi$ y $U_\varphi = U_r$.

(10a) $\vec{v} = r \omega \hat{U}_\varphi$

(11a) $a = r \dot{\omega} \hat{U}_\varphi - r \omega^2 \hat{U}_r$

Ejemplo 26: Un cuerpo esférico de masa m , inicialmente en A, se desliza sobre una superficie circular lisa ADB. hallar la velocidad angular y la fuerza ejercida por la superficie en cualquier punto. C.



$$N + mg = m a$$

$$-N U_r + mg \cos \delta U_r - mg \sin \delta U_\varphi = m \ddot{r} U_r + m r \dot{\omega} U_\varphi + m r \omega^2 U_r$$

(1) $-N + mg \cos \delta = -m r \omega^2$

(2) $-mg \sin \delta = m r \dot{\omega}$

$$\delta = \varphi - \pi/2 \rightarrow \cos \delta = \sin \varphi$$

$$\sin \delta = -\cos \varphi$$

(1) $-N + mg \sin \varphi = -m r \omega^2$

(2) $mg \cos \varphi = m r \frac{d\omega}{dt} \quad ; \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega$

$$\int_0^\varphi g \cos \varphi d\varphi = \int_0^\omega r \omega d\omega$$

$$g \sin \varphi = \frac{r \omega^2}{2} \rightarrow$$

$$N = m r \omega^2 + mg \cos \delta$$

$$= m r \omega^2 + mg \sin \varphi$$

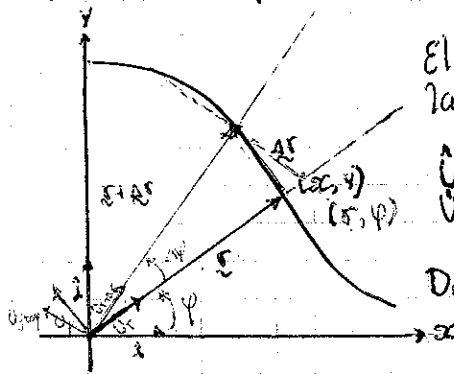
$$= 2mg \sin \varphi + mg \sin \varphi$$

$$= 3mg \sin \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g \sin \varphi}{r}}$$

Coordenadas Polares.

Algunos problemas en la Física se simplifican si se resuelven con un sistema de coordenadas polares, tales como movimientos de rotación, velocidad angular, torque etc, en donde se ve claramente la potencialidad de las coordenadas polares.



El primer paso es definir una base ortonormal. esta la determinan los siguientes vectores unitarios:

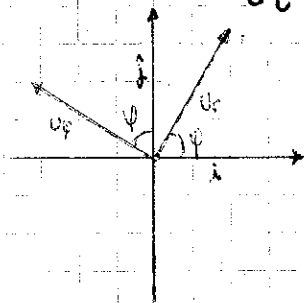
\hat{U}_r : en dirección radial
 \hat{U}_ϕ : en dirección transversal o acimutal. (1)

Definida la base, que, como se puede observar, no es fija sino que cambia con el tiempo, podemos definir la posición, velocidad y aceleración:

$$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \text{ en CC.} \quad \underline{r} = r\hat{U}_r \text{ en CP.} \quad (2)$$

$$\underline{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \text{ en CC} \quad \underline{v} = \frac{d(r\hat{U}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{U}_r + r\frac{d\hat{U}_r}{dt} \quad (3)$$

Para hallar $\frac{d\hat{U}_r}{dt}$ expresamos \hat{U}_r y \hat{U}_ϕ en términos de \hat{i} y \hat{j}



$$\hat{U}_r = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{U}_r \\ \hat{U}_\phi \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Obtenemos una matriz que denota una rotación.

$$\frac{d\hat{U}_r}{dt} = \frac{d\cos\phi}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}\hat{i} + \frac{d\sin\phi}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}\hat{j} = \dot{\phi}(-\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}) = \dot{\phi}\hat{U}_\phi = \frac{d\phi}{dt}\hat{U}_\phi$$

circunferencia unitaria.

$$\frac{d\hat{U}_\phi}{dt} = \frac{d(-\sin\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}\hat{i} + \frac{d(\cos\phi)}{d\phi} \frac{d\phi}{dt}\hat{j} = \frac{d\phi}{dt}(-\cos\phi\hat{i} - \sin\phi\hat{j}) = -\dot{\phi}\hat{U}_r = -\frac{d\phi}{dt}\hat{U}_r$$

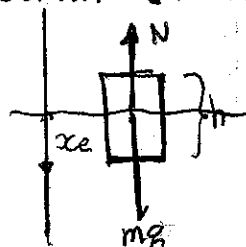
Obtenemos que. (5) $\frac{d\hat{U}_r}{dt} = \frac{d\phi}{dt}\hat{U}_\phi$ (6) $\frac{d\hat{U}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}\hat{U}_r$

(3) nos queda: $\underline{v} = \frac{dr}{dt}\hat{U}_r + r\frac{d\phi}{dt}\hat{U}_\phi$ (7)

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{U}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\phi}{dt}\hat{U}_\phi\right)$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{U}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{U}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\phi}{dt}\hat{U}_\phi + r\frac{d^2\phi}{dt^2}\hat{U}_\phi + r\frac{d\phi}{dt}\frac{d\hat{U}_\phi}{dt} = \text{reemplazamos (5) y (6)}$$

Ejemplo 24: Un cilindro sólido de densidad ρ_c está sumergido en un fluido de densidad ρ_f . Si se hunde ligeramente y se suelta este empieza a oscilar. ¿Con qué frecuencia oscila? (Fuerza de Boyancia)



En equilibrio: $mg - B = 0$
 Fuera de equilibrio: $mg - B = m\ddot{a}$

$$V_c = \pi r^2 h$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow \rho dV = dm \text{ como } \rho \text{ es constante. } M = \rho V$$

$$m_c = \rho_c \pi r^2 h$$

$$m_f = \rho_f \pi r^2 x_e$$

La Fuerza de Boyancia es igual al peso del líquido desplazado por el cuerpo.

En equilibrio: $\rho_c \pi r^2 h g = \rho_f \pi r^2 x_e g$

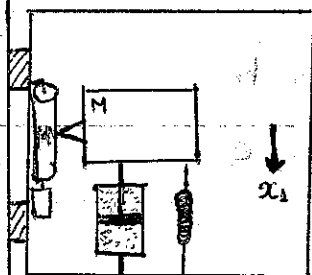
Fuera de equilibrio: $\rho_c \pi r^2 h g - \rho_f \pi r^2 x g = \rho_c \pi r^2 h \ddot{x}$

$$\rho_c h g - \rho_f x g = \rho_c h \ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{\rho_f g}{\rho_c h} x = g$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_f g}{\rho_c h}}$$

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi) + \frac{\rho_c h}{\rho_f}$$

Ejemplo 25: Sismógrafo: Para registrar los movimientos sísmicos la amplitud de vibración de la aguja debe ser igual a la amplitud de vibración de la tierra.



x_1 : desplazamiento de la masa respecto a su posición de equilibrio.

x_2 : desplazamiento de la caja respecto a su posición de equilibrio.

entonces $x_{12} = x_1 - x_2$ movimiento relativo (1)

$$x_1(2) - k(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = M \ddot{x}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_2 = \text{aceleración de la caja y de la tierra} \\ \ddot{x}_1 = \text{aceleración de M.} \end{array} \right.$$

Reemplazamos (1) en (2): $-k x - b \dot{x} = M(\ddot{x} + \ddot{x}_2)$

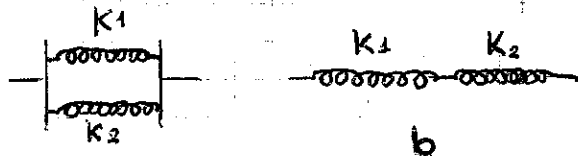
$$\text{entonces: } \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \ddot{x}_2 \rightarrow \ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = A\omega^2 \cos \omega t$$

Los valores de Q que se encuentran en la realidad son muy variables:
Frecuencias de oscilación

En sistemas mecánicos	10^{-10^2}	
Circuitos eléctricos	10^2	10^4 Hertz.
Osciladores de cuarzo	10^4	10^5 Hertz.
Microondas	10^4-10^6	10^{10} Hertz.
Fibras Ópticas	$>10^5$	$10^{14}-10^{16}$ Hz.

Ejemplo 22:

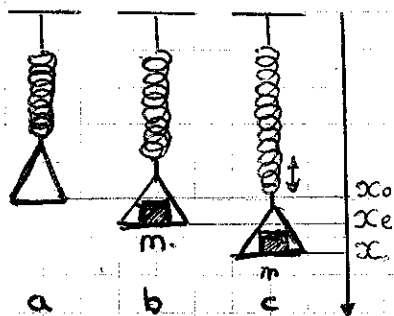
Por qué resorte se pueden reemplazar los dos sistemas?



a) $F = Kx$ $x = x_1 = x_2$
 $F_1 = K_1 x$ $F = F_1 + F_2 \rightarrow Kx = (K_1 + K_2)x$
 $F_2 = K_2 x$ $Kx = K_1 x + K_2 x \rightarrow K = K_1 + K_2$

b) $F = F_1 = F_2 \rightarrow x_1 = \frac{F}{K_1}; x_2 = \frac{F}{K_2} \rightarrow x = \frac{F}{K} \rightarrow x = x_1 + x_2$
 $\frac{F}{K} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} \rightarrow \frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$

Ejemplo 23: En el extremo inferior de un resorte de constante de elasticidad K se cuelga un platillo de masa despreciable sobre el cual se coloca un objeto de masa m . Se imprime al objeto oscilaciones de amplitud A , determinar el valor máximo de A para que el objeto no salte del platillo.



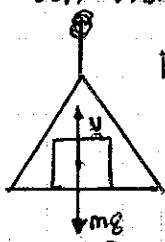
(1) $mg - K(x_e - x_0) = 0$ en **b**

(2) $mg - K(x - x_0) = m\ddot{x}$ en **c**

(1) - (2): $-Kx_e + Kx = -m\ddot{x}$
 $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$

$x = x_n + x_p$ (4) en N.A.A.F.
 $x_n = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad x_p = x_e$

(3). $x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) + x_e$ que es también un movimiento oscilatorio, pero con una nueva posición de equilibrio en x_e .



Fuerzas en el platillo:

$mg - N = m\ddot{x}$

$N = mg - m\ddot{x}$

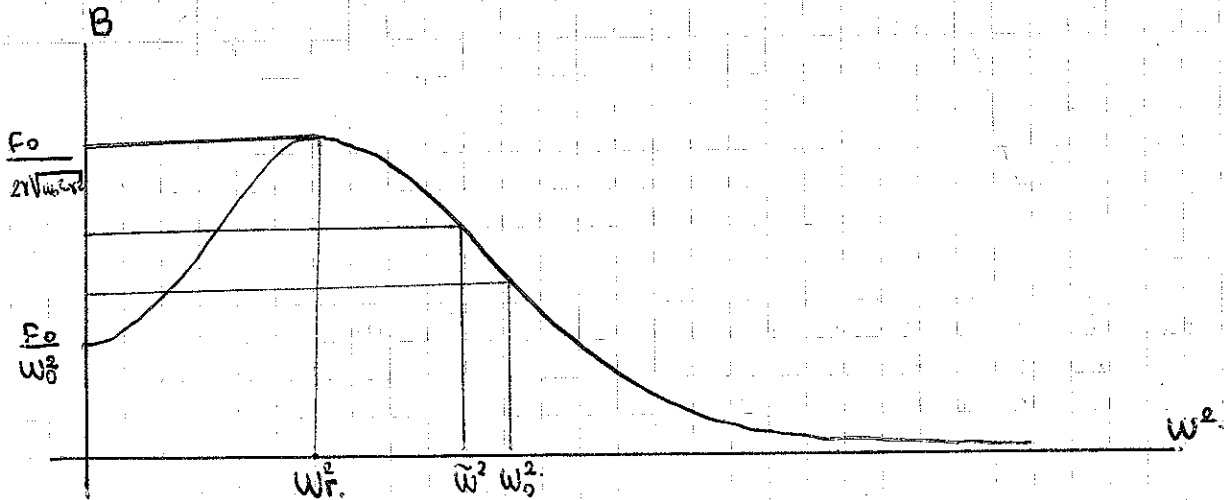
$N = m[g + A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha)]$ donde $A\omega_0^2$ es el valor máximo de la aceleración y $-A\omega_0^2$ el mínimo.

entonces $N \geq 0 \Leftrightarrow g \geq A\omega_0^2$

$A \geq \frac{g}{\omega_0^2}$

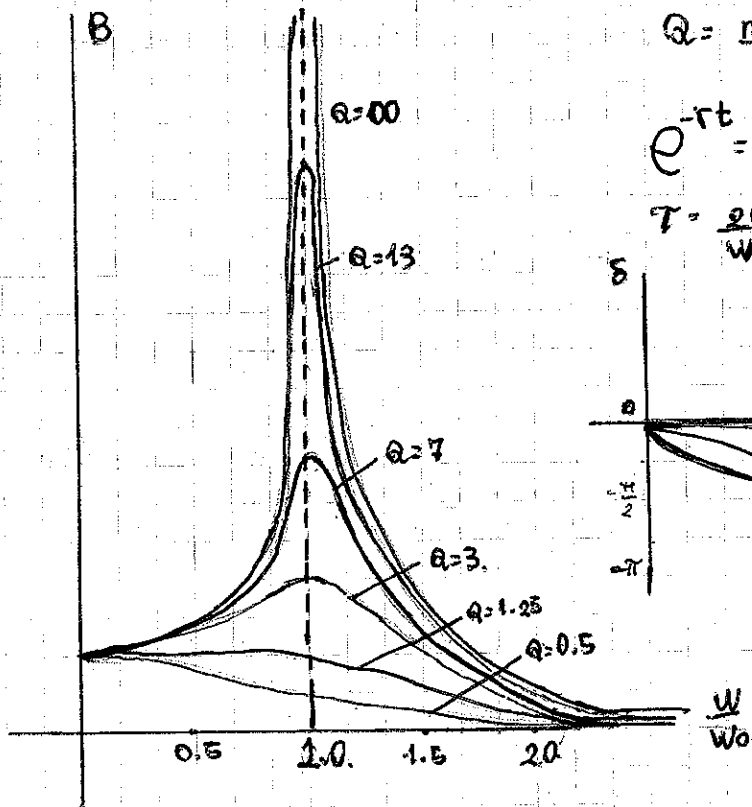
c) Si $\omega^2 = \tilde{\omega}^2$ (la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia de amortiguación). $\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 - r^2$

$$B = \frac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2 + r^2)^2 + 4r^2(\omega_0^2 - r^2)]^{1/2}} = \frac{F_0}{\sqrt{r^4 + 4r^2\omega_0^2 - 4r^2}} = \frac{F_0}{r\sqrt{4\omega^2 - 3r^2}}$$



ω^2	0	$\omega_r^2 = \omega_0^2 - r^2$	$\tilde{\omega}^2 = \omega_0^2 - r^2$	ω_0^2	∞
B.	F_0/ω_0^2	$\frac{F_0}{2r\sqrt{\omega_0^2 - r^2}}$	$\frac{F_0}{r\sqrt{4\omega_0^2 - 3r^2}}$	$\frac{F_0}{2r\omega_0}$	0

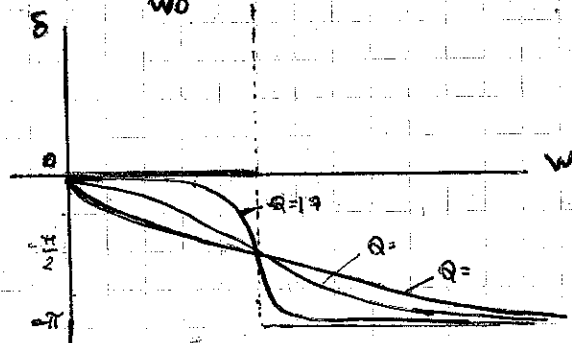
El grado de amortiguamiento de un sistema oscilatorio se acostumbra a definir en función del factor de calidad. (Q)

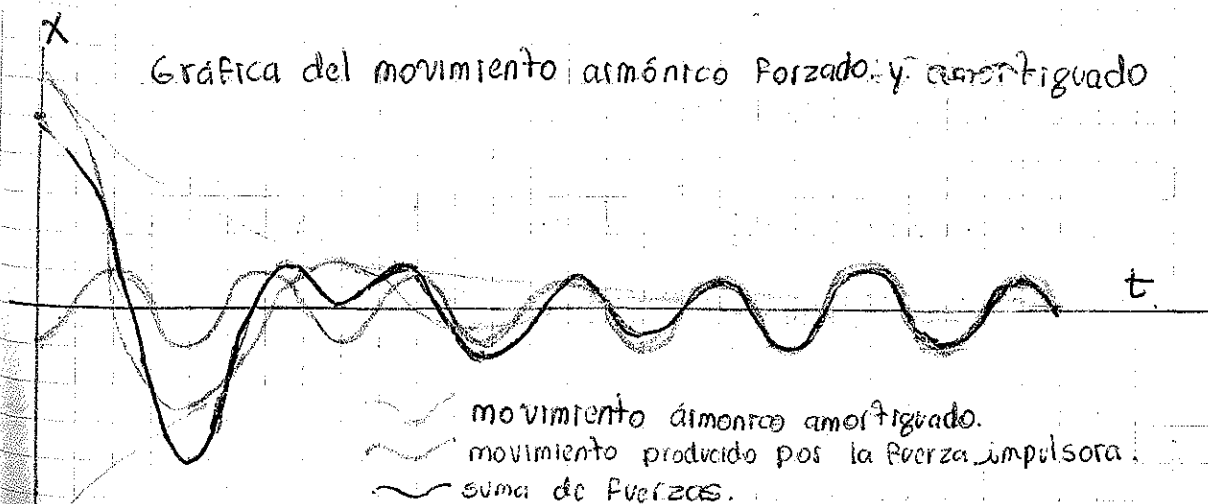


$$Q = \frac{m\omega_0}{\beta} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \text{ entonces.}$$

$$e^{-rt} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ donde}$$

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} : \text{ tiempo de amortiguación.}$$





Nota: γ es la fricción normalizada: $B/2m$.
 ω_0 es la frecuencia natural del sistema: $\sqrt{k/m}$.
 $\tilde{\omega}$ es la frecuencia de amortiguación: $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.
 ω es la frecuencia de la fuerza impulsora.

En la gráfica se observa que para tiempos grandes el M.A.A.F. tiende a ser igual a la fuerza impulsora.

Amplitud de la fuerza impulsora: vamos a definir B como una función de la frecuencia ω .

$$(14b) \quad B = \frac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4r^2\omega^2]^{1/2}}$$

i) Cuando ω^2 tiende a cero, B tiende a un valor constante: F_0/ω_0^2 .

ii) Cuando ω^2 tiende a infinito, B tiende a cero.

iii) Derivando el denominador (sin tener en cuenta la raíz) nos queda,

$2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 4r^2\omega = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$ entonces la función $B(\omega)$ asume un máximo en esta frecuencia, que recibe el nombre de **FRECUENCIA DE RESONANCIA**. la amplitud para esta frecuencia es:

$$(16) \quad B(\sqrt{\omega_0^2 - 2r^2}) = \frac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2r^2)^2 + 4r^2(\omega_0^2 - 2r^2)]^{1/2}} = \frac{F_0}{2r\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} = B_r$$

Esta amplitud recibe el nombre de Amplitud de resonancia.

iv) Cuando $\omega^2 = \omega_0^2$ (la frecuencia impulsora es igual a la frecuencia natural del sistema)

$$B = \frac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4r^2\omega_0^2]^{1/2}} = \frac{F_0}{2r\omega_0}$$

$$-W^2 Z_0 + 2r i W Z_0 + W_0^2 Z_0 = F_0 \quad (10a) \text{ despejamos } Z_0.$$

$$(10b) \quad Z_0 (W_0^2 - W^2 + 2i r W) = F_0.$$

$$(10c) \quad Z_0 = \frac{F_0}{W_0^2 - W^2 + 2i r W} \quad \text{multiplicamos por el conjugado del divisor.}$$

$$(10d) \quad Z_0 = \frac{F_0 (W_0^2 - W^2 - 2i r W)}{(W_0^2 - W^2)^2 + 4r^2 W^2} \quad \text{separamos la parte real y la parte imaginaria.}$$

$$(10e) \quad Z_0 = \frac{F_0 (W_0^2 - W^2)}{(W_0^2 - W^2)^2 + 4r^2 W^2} - i \frac{2r W F_0}{(W_0^2 - W^2)^2 + 4r^2 W^2} \quad \text{que es de la forma!}$$

$$(10f) \quad Z_0 = a + b i$$

Con este tratamiento, la ecuación (9) nos queda:

$$(11) \quad \begin{aligned} Z(t) &= (a + bi)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ Z(t) &= (a \cos \omega t - b \sin \omega t) + i(a \sin \omega t + b \cos \omega t) \end{aligned}$$

Comparando con (7) $Z = x(t) + i y(t)$ (5) y (6) quedarían:

$$(12) \quad x_p = a \cos \omega t - b \sin \omega t \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ se conocen en (10e)}$$

$$(13) \quad y_p = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

la ecuación (12) la reducimos a una sola ecuación sinusoidal así:

$$x_p = B \cos \delta \cos \omega t - B \sin \delta \sin \omega t \quad \text{donde } a = B \cos \delta$$

$$(14) \quad x_p = B \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{donde } \tan \alpha = \frac{b}{a} \text{ y } B = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(14a) \quad B = \frac{F_0}{[(W_0^2 - W^2)^2 + 4r^2 W^2]^{1/2}} \quad (14b) \quad - \frac{2r W}{W_0^2 - W^2} = \tan \alpha.$$

(14) es la solución de la ecuación no homogénea; la solución de la ecuación homogénea ya la conocemos (14 de maa)

$x_h = A e^{-rt} \sin(\tilde{\omega} t + \gamma)$, entonces sumamos $x_h + x_p$.
Para obtener la ecuación general del movimiento armónico amortiguado forzado:

$$(15) \quad x(t) = A e^{-rt} \sin(\tilde{\omega} t + \gamma) + \frac{F_0}{[(W_0^2 - W^2)^2 + 4r^2 W^2]^{1/2}} \left[\cos \omega t + \tan^{-1} \frac{-2r W}{W_0^2 - W^2} \right]$$

El Primer sumando es llamado solución transitoria o transiente; el segundo sumando es la solución estacionaria porque permanece en el tiempo.

Supongamos que x_h es solución de la ecuación homogénea (con $F(t)=0$) entonces

$$(2) \ddot{x}_h + 2\alpha \dot{x}_h + b x_h = 0.$$

Igualmente, supongamos que x_p es la solución de la ecuación homogénea, entonces

$$(3) \ddot{x}_p + 2\alpha \dot{x}_p + b x_p = F(t) \quad \text{sumamos (2) + (3):}$$

$$(4) \frac{d^2}{dx^2} (x_h + x_p) + 2\alpha \frac{d}{dt} (x_h + x_p) + b (x_h + x_p) = F(t).$$

de esta ecuación se concluye que $x(t) = x_h + x_p$. (4a).
(1) = (2) + (3)

Tenemos que resolver la ecuación (3) con un método de variación de parámetros. para esto reemplazamos C_1 y C_2 de la fórmula general de la ecuación homogénea:

$$x_h(t) = C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t). \quad C_1 \text{ y } C_2 \text{ se reemplazan por dos funciones } v_1(t) \text{ y } v_2(t).$$

Si expresamos la fuerza impulsora de forma sinoidal o cosinoidal, tendremos una fórmula general.

$$F(t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \text{o} \quad F(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad \text{donde } F_0 = F_0/m. \text{ fuerza normalizada.}$$

Escribimos los dos casos que se nos pueden presentar.

$$(5) \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t.$$

$$(6) \ddot{y} + 2\gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = F_0 \sin \omega t.$$

Es necesario escribir juntas para poder definir una función compleja. Juntas ecuaciones corresponden a osciladores armónicos amortiguados forzados. Definimos:

$$(7) Z(t) = x(t) + i y(t).$$

entonces (5) + $i \times$ (6) nos quedará.

$$(8) \ddot{Z} + 2\gamma \dot{Z} + \omega_0^2 Z = F_0 e^{i\omega t}.$$

Un "Ansatz" (suposición) que podemos aplicar a la fórmula (8) es haciendo:

$$(9) Z = Z_0 e^{i\omega t}.$$

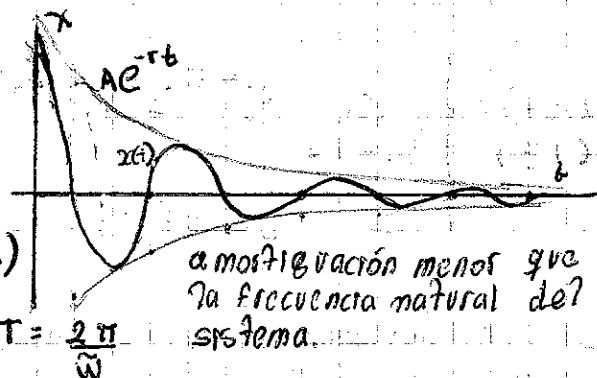
Entonces si en (8) dividimos todo por $e^{i\omega t}$ después de haber reemplazado Z y haber derivado, nos resulta la ecuación:

1) Amortiguamiento débil.

$$r < \omega_0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\tilde{\omega}$$

$$x(t) = e^{-rt} A(\sin \tilde{\omega} t + \alpha)$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} \rightarrow \tilde{\omega} < \omega_0 \quad T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$$



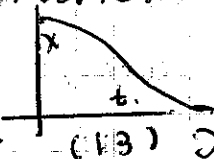
2) Amortiguación Fuerte:

amortiguación mayor que la frecuencia natural del sistema
oscilador sobreamortiguado. $r > \omega_0$.

$$\Omega = \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_1 = -r + \Omega$$

$$\lambda_2 = -r - \Omega$$

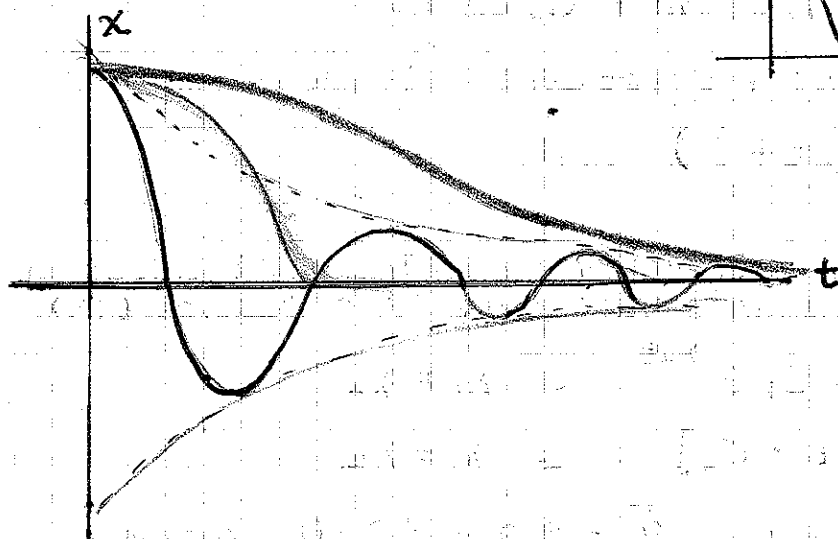
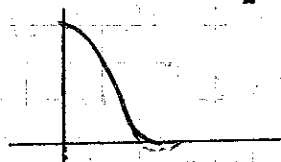


$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{No hay oscilación.}$$

$$= e^{-rt} (C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t})$$

3) Amortiguación crítica: $\omega_0 = r \rightarrow \lambda_{1,2} = -r$

$$(13b) \quad x(t) = e^{-rt} (C_1 t + C_2)$$



Sobreamortiguación
amortiguación crítica
amortiguación débil

Oscilador armónico amortiguado forzado.

En este sistema se agrega una fuerza que actúa como función del tiempo.

$$-Kx - B\dot{x} + F(t) = m\ddot{x} \quad \text{se despeja } F(t) \text{ y se divide por } m$$

$$\ddot{x} + \frac{B}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad \text{Ecuación no homogénea, de segundo grado, cuya forma general es.}$$

$$(1) \quad \ddot{x} + 2ax + bx = p(t) \quad \text{con } a \text{ y } b \text{ constantes.}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \gamma e^{\lambda_2 t} = C_2 e^{\lambda_1 t} + C_3 e^{\lambda_2 t} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{\lambda_2 t} [C_1 t + \gamma] & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \quad (13) \quad (13a) \quad (13b)$$

Si consideramos el caso general, en donde λ_1 y λ_2 son soluciones complejas, entonces:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \text{con } \{\alpha, \beta\} \text{ son } \in \mathbb{R}$$

$$(13e) \quad x(t) = C_2 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_3 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

$$x(t) = e^{\alpha t} [C_2 e^{i\beta t} + C_3 e^{-i\beta t}]$$

$$x(t) = e^{\alpha t} [C_2 (\cos \beta t + i \sin \beta t) + C_3 (\cos \beta t - i \sin \beta t)]$$

$$x(t) = e^{\alpha t} [(C_2 + C_3) \cos \beta t + (C_2 - C_3) i \sin \beta t]$$

$$x(t) = e^{\alpha t} C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t.$$

Utilizando $\sin \beta t \cos \gamma + \cos \beta t \sin \gamma$ (γ cualquier constante)

$$x(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t + \gamma) \quad (14)$$

Existen varios tipos de amortiguamiento, para llegar a la ecuación del movimiento de cada uno usamos (13)

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} [C_1 t + C_2] \quad \text{si } \lambda_1 = \lambda_2.$$

Partimos de la ecuación: $\ddot{x} + \frac{B}{m} \dot{x} + \frac{K}{m} x = 0$. llamamos

$\frac{B}{m} = 2\gamma$ y $\frac{K}{m} = \omega_0^2$, y determinamos la ecuación característica:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \text{ entonces } \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Vemos que si $\gamma > \omega_0$ las dos soluciones son reales, pero si por el contrario $\gamma < \omega_0$ las soluciones son complejas.

Definimos dos números reales Ω y $\tilde{\omega}$

$$\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \gamma > \omega_0.$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \omega_0 > \gamma.$$

Según la característica de las soluciones, se presentan tres tipos de amortiguamiento;

(6) $U(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ como (4a) $U(t) = (D - \lambda_2)X$, entonces:

(7) $\frac{dx}{dt} - \lambda_2 X = C_1 e^{\lambda_1 t}$ reducimos el orden de la ecuación, pero esta ya no es homogénea.

La ecuación (7) es un caso particular de la ecuación diferencial de primer orden:

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} + P(t)X = Q(t)$$

Esta ecuación se soluciona encontrando una función $\rho(t)$ tal que al multiplicar (8) x $\rho(t)$ el lado izquierdo de la ecuación nos quede: $\frac{d(\rho(t)X(t))}{dt}$. en tal caso ρ se puede escribir así:

(8a) $\frac{d}{dt} \rho X = Q \rho$ como conocemos ρ y Q , entonces:

$$(8b) \quad \rho X = \int Q \rho dt + C \quad \text{y se despeja } X \text{ de } \rho X.$$

Entonces busquemos ρ en nuestra ecuación: (8).

$$(9) \quad \rho \frac{dx}{dt} + \rho P X = \rho Q \quad \text{igualamos con (8a):}$$

$$(9a) \quad \rho \frac{dx}{dt} + \rho P X = \frac{d}{dt} \rho X \rightarrow \rho \frac{dx}{dt} + \rho P X = \rho \frac{dx}{dt} + X \frac{d\rho}{dt}.$$

Simplificamos: $\rho P = \frac{d\rho}{dt} \rightarrow \int \frac{d\rho}{\rho} = \int P dt \rightarrow \ln \rho = \int P dt$, entonces:

$$(10) \quad \rho(t) = e^{\int P(t) dt}, \text{ reemplazamos (10) en (8b)}$$

$$(11) \quad X(t) = e^{-\int P dt} \left[\int Q e^{\int P dt} dt + \gamma \right] \quad \text{que es la solución de la ecuación general (8)}$$

comparamos (7) y (8)

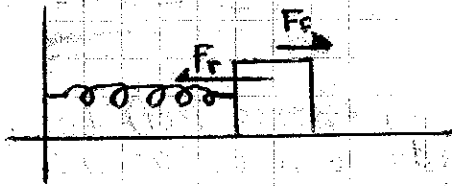
$$P(t) = -\lambda_2 \quad Q(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{y reemplazamos estos valores:}$$

$$(12) \quad \tilde{x}(t) = e^{\lambda_2 t} \left[\int C_1 e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} dt + \gamma \right]$$
$$= x(t) = e^{\lambda_2 t} \left[C_1 \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt + \gamma \right]. \quad \text{en donde...}$$

$$\int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} & \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ t & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \quad \text{entonces,}$$

Movimiento con fuerzas de fricción y recuperadoras combinadas (Oscilador Armónico Amortiguado)

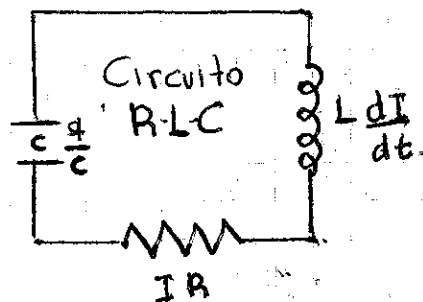
Vamos a estudiar conjuntamente el caso de una masa suspendida en un resorte sumergido en un fluido, paralelo al caso de la carga de voltaje en un condensador, una bobina y una resistencia:



Fricción tipo Stokes: $F_f = -\beta \dot{x} \hat{i}$
Fuerza recuperadora: $-k x \hat{i}$

$$-k x \hat{i} - \beta \dot{x} \hat{i} = m \ddot{x} \hat{i} \text{ entonces,}$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \text{ donde } \frac{k}{m} = \omega_0^2$$



$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = 0 \text{ donde } I = \frac{dq}{dt} \text{ entonces,}$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \text{ donde } \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$R \equiv \beta; \quad \frac{k}{m} \equiv \frac{1}{LC}; \quad L \equiv m; \quad C \equiv \frac{1}{k}; \quad q \equiv x \quad \dot{q} = I \equiv v \equiv \dot{x}$$

La solución de la ecuación diferencial puede obtenerse aplicando métodos generales de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + bx = 0 \text{ ecuación diferencial homogénea con el operador derivada lineal.}$$

Definimos un operador $D = \frac{d}{dt}$, entonces, la ecuación anterior queda así:

(1) $(D^2 + 2aD + b)x = 0$ la ecuación característica de esta ecuación de segundo orden es:

(2) $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ si λ_1 y λ_2 son soluciones, entonces:

(3) $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$ la ecuación (1) se puede escribir así:

(4) $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)x = 0$ llamamos $U(t) = (D - \lambda_2)x$ (4a) una función del tiempo, entonces (4) nos queda:

(5) $(D - \lambda_1)U = 0$ que es una ecuación de primer orden, entonces,

$$\frac{dU}{dt} - \lambda_1 U = 0 \rightarrow \int \frac{dU}{U} = \lambda_1 \int dt \rightarrow \ln U = \lambda_1 t + \alpha \text{ despejamos } U:$$

$$U = e^{\lambda_1 t + \alpha} \text{ llamamos: } e^\alpha = C_1 \text{ entonces:}$$

①' $V_x \approx V_{0x} \left(1 - \frac{B}{m} t\right)$ si $\frac{B}{m} t \ll 1$ ó $t \ll \frac{m}{B}$ $V_x \approx V_{0x}$ tiempos cortos.
de la ecuación ① sin expandir: $\frac{B}{m} t \gg 1 \rightarrow V_x$ tiende a 0

Nota: "La aproximación ①' es buena para tiempos cortos."

②' $V_y = -\frac{mg}{B} + \left(\frac{mg}{B} + V_{0y}\right) \left(1 - \frac{B}{m} t\right) = -\frac{mg}{B} + \frac{mg}{B} - g t + V_{0y} - \frac{B}{m} V_{0y} t$

②' $V_y = V_{0y} \left(1 - \frac{B}{m} t\right) - g t$ Si la fricción es despreciable, la ecuación es similar al tipo parabólico

Velocidad límite: cuando $mg = Bv \rightarrow v = \frac{mg}{B}$ Porque $e^{-\infty} = 0$ en la ecuación ②

de ③ Vemos que la máxima posibilidad de que pueda avanzar la partícula a lo largo del eje x es

$x_{max} = \frac{m}{B} V_{0x}$ (este no es el rango del movimiento)

③' $x = \frac{m}{B} V_{0x} \left(1 - 1 + \frac{B}{m} t\right) = V_{0x} t$ para tiempos pequeños.

④' $y = -\frac{mg}{B} t + \left(\frac{m}{B} V_{0y} + \frac{m^2 g}{B^2}\right) \left(\frac{B}{m} t\right) = V_{0y} t$

al inicio de la trayectoria, el cuerpo actúa como un cuerpo libre, con velocidad constante.

Para hallar el tiempo de subida, hacemos $V_y = 0$
para calcular el tiempo de vuelo, hacemos $y = 0$

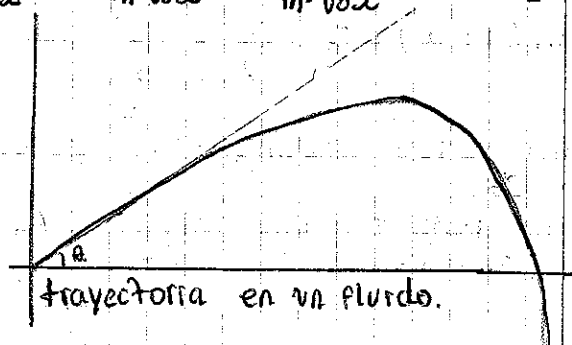
Ecuación de la trayectoria:

despejamos t de x en ③ y nos queda: $t = \frac{m}{B} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{B}{m} \frac{x}{V_{0x}}} \right)$
reemplazo esta ecuación en ④

$y(x) = \left(\frac{mg}{B V_{0x}} + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}\right) x + \frac{m^2 g}{B^2} \ln \left(1 - \frac{B}{m} \frac{x}{V_{0x}}\right)$ ⑤ expandimos con S. Taylor.

$y(x) = \left(\frac{mg}{B V_{0x}} + \frac{V_{0y}}{V_{0x}}\right) x - \frac{m^2 g}{B^2} \left[\frac{B}{m V_{0x}} x + \frac{B^2}{m^2 V_{0x}^2} x^2 + \frac{B^3}{m^3 V_{0x}^3} x^3 + \dots \right]$ $x = \frac{m}{B} V_{0x}$
 $= \frac{V_{0y}}{V_{0x}} x - \frac{g}{V_{0x}^2} x^2 - \frac{B g}{m V_{0x}^3} x^3 - \dots$

Los dos primeros términos, que son los relevantes, corresponden a la ecuación de la trayectoria parabólica

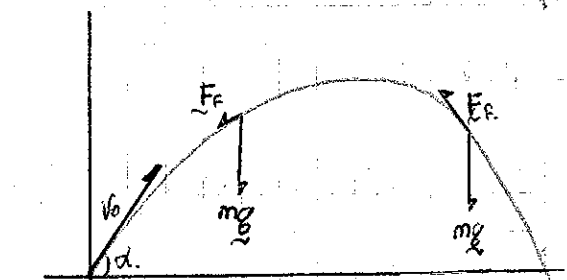


Ejemplo 21: Tiro parabólico con fricción tipo Stokes.

$$F_f = -\beta v$$

$$mg + F_f = ma$$

$$-mg\hat{j} = \beta \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1) \text{ La ecuación diferencial equivale a dos escalares:}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -mg &= \beta v_y + m \frac{dv_y}{dt} & -\frac{\beta}{m}t &= \ln \left[\frac{\frac{mg}{\beta} + v_y}{\frac{mg}{\beta} + v_{y0}} \right] & \textcircled{2} \quad -\beta v_x &= m \frac{dv_x}{dt} & -\frac{\beta}{m}t &= \ln \left(\frac{v_x}{v_{x0}} \right) \\ -g - \frac{\beta v_y}{m} &= \frac{dv_y}{dt} & & & -\frac{\beta v_x}{m} &= \frac{dv_x}{dt} & v_x &= e^{-\frac{\beta}{m}t} v_{x0} \\ -\frac{\beta}{m} \left(\frac{mg}{\beta} + v_y \right) &= \frac{dv_y}{dt} & v_y &= -\frac{mg}{\beta} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \left(\frac{mg}{\beta} + v_{y0} \right) & -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt &= \int_{v_{x0}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} \\ -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt &= \int_{v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{\frac{mg}{\beta} + v_y} & \text{De los resultados } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} \text{ obtenemos que.} & & & & & \end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = -\frac{mg}{\beta} \hat{j} + e^{-\frac{\beta}{m}t} \left(\vec{v}_0 + \frac{mg}{\beta} \hat{j} \right) \quad (3) \text{ como } ds = \vec{v} dt, \text{ podemos hallar } \vec{r}(t) \text{ integrando:}$$

$$\vec{r}(t) = -\frac{mg}{\beta} t \hat{j} + \left(\frac{mv_{x0}}{\beta} + \frac{m^2 g}{\beta^2} \hat{j} \right) (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) \quad (4)$$

tenemos ya cuatro ecuaciones escalares.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad v_x &= v_{x0} e^{-\frac{\beta}{m}t} & \textcircled{2} \quad v_y &= -\frac{mg}{\beta} + \left(\frac{mg}{\beta} + v_{y0} \right) e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ \textcircled{3} \quad x &= \frac{m}{\beta} v_{x0} (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) & \textcircled{4} \quad y &= -\frac{mg}{\beta} t + \left(\frac{mv_{y0}}{\beta} + \frac{m^2 g}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}) \end{aligned}$$

Para analizar estas cuatro fórmulas, necesitamos expansiones de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \approx 1 + x \quad \text{para } x \leq 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \approx x \quad \text{para } x \leq 1$$

Con estas expansiones podemos visualizar mejor las situaciones.

Como para tiempos largos $v_y \approx v_{lim}$ y $v_x \approx 0$, el cuerpo cae con velocidad constante.

Igualmente con la ecuación (1) podemos afirmar que la carga también cumple la ecuación armónica con la misma frecuencia que la corriente:

$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$ Podemos comparar la carga de voltaje con las ecuaciones que producen las fuerzas recuperadoras:

$$q \equiv x \equiv A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad v_{\max}: A\omega_0 \quad i_{\max}: \frac{A}{\sqrt{LC}} \quad K \equiv \frac{1}{C} \quad m \equiv L$$

$$i \equiv v \equiv A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Fuerzas de Rozamiento: cuando dos superficies están en contacto, los átomos de ambas superficies interactúan de una manera compleja; sin embargo podemos agrupar dichas fuerzas en una única fuerza, que la llamamos fuerza de rozamiento. Dicha fuerza es proporcional a la normal. Y depende de la velocidad, dependiendo del caso; (si estamos hablando de superficies o de fluidos).

Tipos de Rozamiento: se utilizan tres casos:

Ley de Stokes: que permite calcular la ecuación del movimiento para fluidos en que se mueven cuerpos a velocidades relativamente bajas.

$F - \beta v = m a$ donde β está dependiendo de la viscosidad del fluido y de la forma del cuerpo. cuando Fv iguala a la fuerza, se llega a una velocidad límite: $v_{\lim} = F/\beta$

Newton: para situaciones mas complicadas, se utilizan fórmulas como:

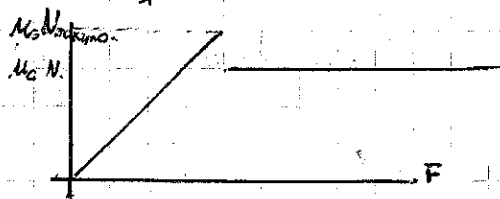
$$F_r = -\gamma v^2 = -\gamma v v, \text{ en general. } F_v = (a_0 + a_1 v + a_2 v^2)$$

Tipo Coulomb: Se utiliza para superficies secas en contacto, para velocidades dentro de ciertos límites. ni muy pequeñas ni muy altas.

$$F_f = a_0 = \mu_c N \quad \mu_c: \text{coeficiente cinético de rozamiento.}$$

Fuerzas de fricción estáticas:

Comportamiento de la fuerza de fricción con respecto a una fuerza aplicada que aumenta:



μ_s : coeficiente estático de fricción

μ_k : coeficiente cinético de fricción.

La ecuación nos dice que el movimiento es periódico, dependiendo este de ω , la cual la llamamos frecuencia angular, entonces.

$$A \sin(\omega_0 t + B) = A \sin(\omega_0(T+t) + B) \\ = A \sin(\omega_0 T + \omega_0 t + B) \\ = A \sin(\omega_0 T + B) \cos \omega_0 T + A \cos(\omega_0 T + B) \sin \omega_0 T$$

condición de igualdad. $\omega_0 T = 2\pi$ porque $\begin{cases} \cos \omega_0 T = 1 \Leftrightarrow \omega_0 T = 2n\pi \\ \sin \omega_0 T = 0 \Leftrightarrow \omega_0 T = n\pi \end{cases}$

dicho movimiento periódico producido por una fuerza restauradora es lo que denominamos MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE, cuya ecuación general está dada por:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ donde } \omega = K/m \text{ donde } \ddot{x} = d^2x/dt^2$$

Ajuste de constantes: hemos visto que para llegar a la función de la posición partiendo de la aceleración, nos aparecen dos constantes que son la amplitud A y la fase inicial " B " o " α ". si damos valores para x_0 y v_0 podemos despegar A y α .

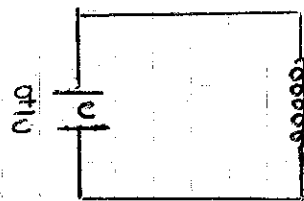
$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \xrightarrow[t=0]{x_0} x_0 = A \sin \alpha \quad \text{de estas dos ecuaciones se deduce que}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) \xrightarrow[t=0]{v_0} v_0 = A \omega_0 \cos \alpha$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \quad \text{y} \quad \tan \alpha = \frac{x_0 \omega_0}{v_0}$$

Supongamos que en $t=0$ $x_0=A \rightarrow \tan \alpha = \infty \rightarrow \alpha = \pi/2$
 $v = \dot{x} = 0$

Ejemplo 20: Caída de voltaje de una bobina



Circuito L.C.

tenemos dos constantes: la inductancia " L " que es una oposición a la corriente y " C " que es la capacidad del condensador, este proceso está dado por la fórmula:

$$(1) \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0 \text{ si derivamos la ecuación con respecto al tiempo:}$$

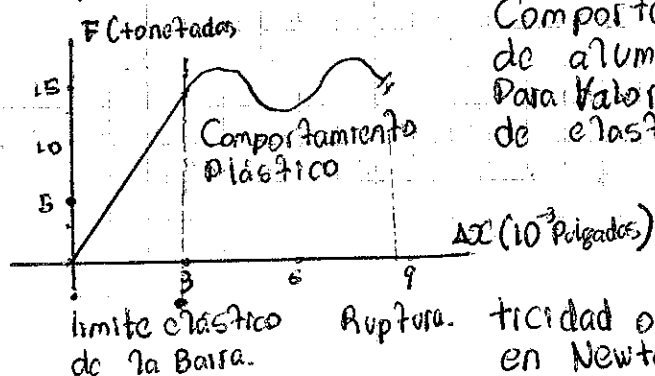
$$\frac{1}{C} \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0. \text{ sabiendo que } I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{I}{C} + L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0. \text{ entonces.}$$

$$\ddot{I} + \frac{1}{LC} I = 0. \text{ tenemos una ecuación armónica donde } \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Nota (\ddot{I}) significa la segunda derivada

Movimiento Armónico Simple

Comportamiento elástico de un material: la variación de la longitud de un cuerpo puede estar ligada a la fuerza que actúa sobre él, y es directamente proporcional a esta, dentro de un cierto límite.



Comportamiento elástico de una barra de aluminio.

Para valores menores que el límite máximo de elasticidad se cumple que:

$$F \propto x \Leftrightarrow F = Kx.$$

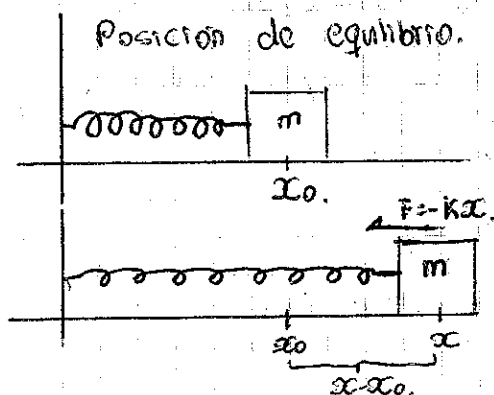
donde K es la constante de elasticidad o constante de Hook, que se mide en Newtons/metro.

Si el cuerpo se le aplica una fuerza F y se desplaza una distancia x , al soltarlo aparece una fuerza recuperadora. Ésta se puede considerar como la fuerza que realiza este sobre el agente que lo está deformando, que por la ley de Newton debe valer:

$F_r = -Kx$: El origen de esas fuerzas, como las de rozamiento, se debe a fuerzas eléctricas entre los átomos.

Todas esas fuerzas en donde la fuerza es proporcional a la distancia a un punto se pueden estudiar con representaciones con resortes unidimensionales.

Ecuación del movimiento de un resorte



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad \text{dividimos por la masa, y reordenamos:}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0. \quad \text{como } K/m \text{ es una constante de dimensiones } s^{-2}, \text{ entonces la podemos reemplazar por } \omega_0^2.$$

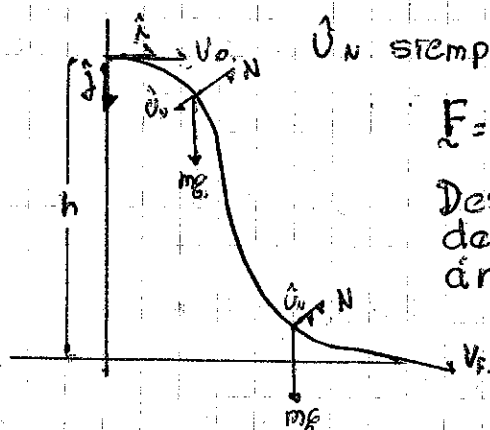
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Dicha ecuación diferencial la satisface la siguiente expresión:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \beta)$$

La cantidad $(\omega_0 t + \beta)$ se denomina fase, por lo tanto, β es llamada fase inicial, donde $t = 0$, x es la elongación, cuyo máximo valor lo tiene cuando $\sin(\omega_0 t + \beta) = \pm 1 \rightarrow x = \pm A$. la letra A simboliza la amplitud del movimiento.

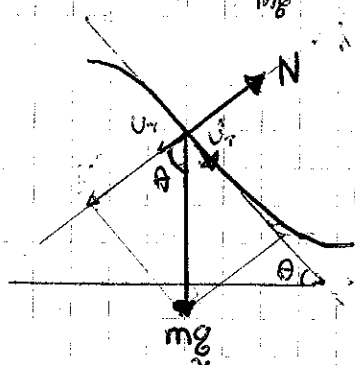
Ejemplo 19: Un cuerpo se desliza sobre una superficie curva. No hay fricción y éste no se desprende de la superficie. hallar la velocidad final y la reacción de la superficie sobre el cuerpo.



\hat{N} siempre va hacia la concavidad de la curva.

$$\underline{F} = m\underline{g} + \underline{N} = m\underline{a} = \underline{F}_N + \underline{F}_T = m \frac{v^2}{\rho} \hat{N} + m \frac{dv}{dt} \hat{t}$$

Descomponemos las fuerzas en el sistema de coordenadas intrínseco, donde θ es el ángulo que hace el peso con \hat{N} :



Sistema intrínseco de coordenadas con \hat{t} y \hat{n} .

$$\textcircled{1} m g \sin \theta \hat{t} + m g \cos \theta \hat{n} + \underline{N} = m \frac{v^2}{\rho} \hat{n} + m \frac{dv}{dt} \hat{t}$$

$$\Rightarrow g \sin \theta \hat{t} = \frac{dv}{dt} \hat{t}$$

$$a_t = g \sin \theta = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{ds} \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow v dv = g \sin \theta ds \quad \text{donde} \quad \sin \theta ds = dy$$

$$\Rightarrow v dv = g dy \quad \text{integrando:} \quad \int_{v_0}^v v dv = \int_0^h g dy$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gh \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh$$

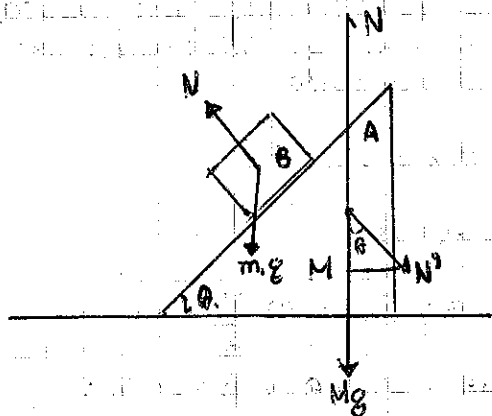
Nota: la velocidad final no depende de la trayectoria.

Para hallar la normal, utilizamos también $\textcircled{1}$

$$m g \cos \theta \hat{n} - N \hat{n} = m \frac{v^2}{\rho} \hat{n} \Rightarrow N = m(g \cos \theta - \frac{v^2}{\rho})$$

Nota: La normal "N" es diferente a la fuerza normal " $\frac{mv^2}{\rho}$ "

Ejemplo 18: un cuerpo m se desliza sobre una cuña de masa M encontrar la aceleración del cuerpo y la cuña y la aceleración relativa entre los dos cuerpos; no hay rozamiento.



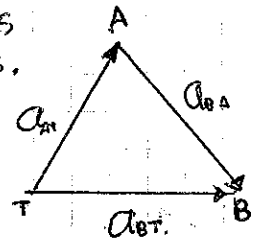
Para M : (A)

$$\Sigma F = N + M\tilde{g} + N'$$

Para m : (B)

$$\Sigma F = m\tilde{g} + N$$

Fuerzas Reales.

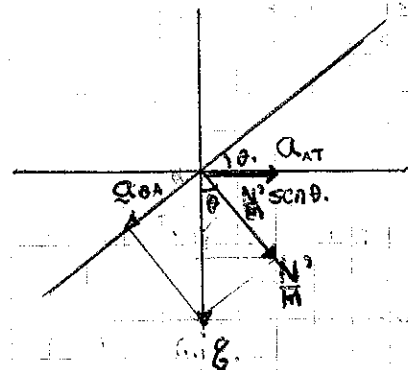


$$a_{AT} + a_{BA} = a_{BT}$$

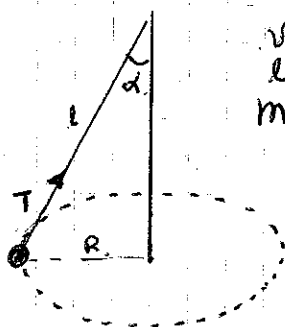
$$m\tilde{g} \sin\theta = m\cdot a_{BA} \Rightarrow \tilde{g} \sin\theta = a_{BA}$$

$$N' \sin\theta = M a_{AT} \Rightarrow \frac{m\tilde{g} \cos\theta \sin\theta}{M} = a_{AT}$$

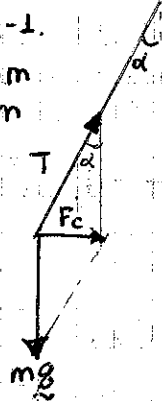
$$a_{BT} = \tilde{g} \sin\theta + \frac{m\tilde{g} \cos\theta \sin\theta}{M}$$



Ejemplo 16: Péndulo cónico: una piedra de 0,5 kg de masa se ata a una cuerda de 0,25 m y se hace girar en un plano horizontal a 15 revoluciones por minuto. La cuerda hace un determinado ángulo con la vertical. hallar la tensión de la cuerda y el ángulo formado



$$\begin{aligned} \omega &= 1.5 \text{ s}^{-1} \\ l &= 0.25 \text{ m} \\ m &= 0.5 \text{ kg} \end{aligned}$$



$$T + mg = F_c$$

$$T \cos \alpha = mg$$

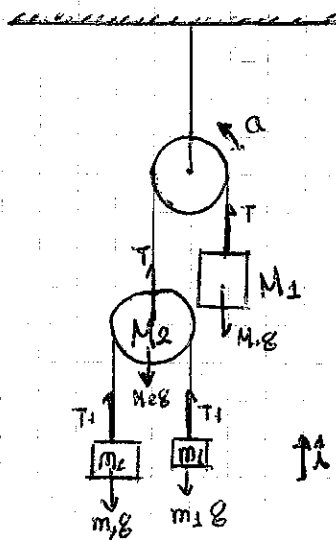
$$T \sin \alpha = F_c = m \frac{v^2}{R}$$

$$v = \omega R = 2\pi \nu R \text{ y } R = l \sin \alpha$$

$$T \sin \alpha = m \omega^2 R = l m \omega^2 \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{T = m \omega^2 l} = m 4 \pi^2 \nu^2 l \approx 11.1 \text{ N}$$

Ejemplo 17: hallar las aceleraciones para cada una de las masas



① Para M_1 : $T + M_1 g = M_1 a \Rightarrow T_1 - M_1 g \hat{i} = M_1 a \hat{i}$

② Para M_2 : $T + 2T_1 + M_2 g = M_2 a$

$$\rightarrow T_1 - 2T_1 \hat{i} - M_2 g \hat{i} = -M_2 a \hat{i}$$

Nota: si $M_2 = 0 \rightarrow T_1 = 2T_1 \hat{i}$

③ Para m_1 : $T_1 + m_1 g = m_1 a_{m1}$

④ Para m_2 : $T_1 + m_2 g = m_2 a_{m2}$

↑ Determinamos la aceleración vista desde M_2
Para m_1 y m_2 ; la denotamos por $\pm |b_i|$

$$a_{m1} u_2 = a_{m1} - a_{M2} \rightarrow a_{m1} = a_{m1} u_2 + a_{M2} = b_i - a_i$$

$$a_{m2} u_2 = a_{m2} - a_{M2} \rightarrow a_{m2} = a_{m2} u_2 + a_{M2} = -b_i - a_i$$

$$\Rightarrow \textcircled{3} \quad T_1 \hat{i} - m_1 g \hat{i} = m_1 (b_i - a_i)$$

$$\textcircled{4} \quad T_1 \hat{i} - m_2 g \hat{i} = m_2 (-b_i - a_i)$$

Tenemos un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas: T, T_1, a, b .

Nota: en $\textcircled{3}$ Podemos observar que:

$$\underbrace{(T_1 - m_1 g \hat{i})}_F + \underbrace{m_1 a_i}_{m a_i} = \underbrace{m_1 b_i}_{F'} = m_1 a_{m, M2}$$

Fuerza Real

masa del cuerpo

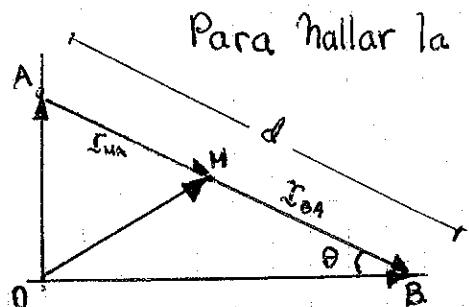
aceleración del s. de ref.

← FUERZA FICTICIA

Fuerza observada

Por M_2 .

Ejemplo 14: Una escalera está apoyada en una pared como se ilustra en la figura. El extremo B se halla horizontalmente con velocidad constante V . Encontrar la velocidad del punto medio cuando $OB < d$. ¿Qué curva describe el punto medio en este proceso? ¿Cómo varía el ángulo θ con el tiempo?



Para hallar la Velocidad de M:

$$\vec{OB} = \vec{r}_{BO} = d \cos \theta \hat{i} \quad (1)$$

$$\vec{OA} = \vec{r}_{AO} = d \sin \theta \hat{j} \quad (2)$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_{BO} - \vec{r}_{AO} = d \cos \theta \hat{i} - d \sin \theta \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{MO} = \vec{r}_{AO} + \frac{1}{2} \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{r}_{MO} = \frac{d}{2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \quad (3) \quad \leftarrow d \sin \theta \hat{j} + \frac{1}{2} d \cos \theta \hat{i} - \frac{1}{2} d \cos \theta \hat{j}$$

$$|\vec{r}_{MO}| = \frac{d}{2} \quad \frac{d \vec{r}_{MO}}{dt} = \vec{v}_{MO} = \frac{d}{2} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) \quad \text{movimiento circular.}$$

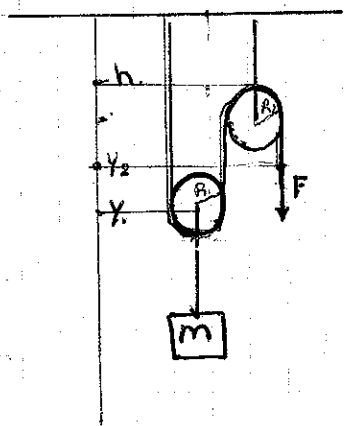
La variación de θ está determinada por la velocidad de B respecto a O. por esta razón, derivamos la ecuación (1).

$$\vec{r}_{BO} = d \cos \theta \hat{i} \rightarrow \vec{v}_{BO} = -d \sin \theta \hat{i} \frac{d\theta}{dt} \quad \text{resolvemos la ecuación diferencial.}$$

$$\frac{v_{BO}}{d} \int_{t=0}^t dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta \rightarrow \frac{v_{BO}}{d} t \Big|_{t=0}^t = \cos \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \frac{v_{BO} t}{d} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\cos \theta_0 + \frac{v_{BO} t}{d} \right)$$

Ejemplo 15: Buscar la relación que existe entre la aceleración del punto A y la aceleración de la masa m.

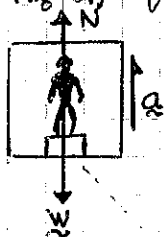


$$L = 2y_1 - h + y_2 - h + \pi R_1 + \pi R_2$$

$$\rightarrow 0 = \frac{2dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} \rightarrow 0 = 2\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2y_2}{dt^2}$$

$$2a_1 = a_2$$

Viene de pag 84)



Un Observador Inercial, ve una fuerza adicional que es el producto de su masa por la aceleración del sistema.

$$F = F' + m \cdot a$$

$$F' = F - m \cdot a = 0$$

$$F' = m \cdot g + N - m \cdot a = 0$$

$$N = m \cdot g - m \cdot a$$

$$N + m \cdot g = m \cdot a$$

$$N - m \cdot g = m \cdot a$$

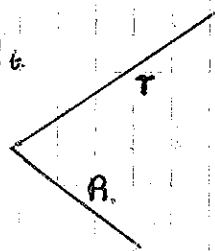
$$N = m (g + a)$$



Ejemplo 12: Demostrar que el hombre que se encuentra en el satélite en órbita se encuentra en un estado de ingravidez.



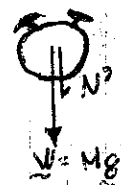
M



Fuerzas que actúan sobre el satélite:

N' : fuerza con que el hombre empuja la tierra.

g' es el valor de g en la órbita del satélite.



$$F_g' = M g' = M \left(-G \frac{M_T}{r^2} \right) \hat{R}$$

Como es un movimiento circular uniforme, las fuerzas deben sumarse en una fuerza centrípeta.

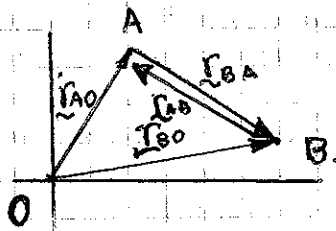
Fuerzas que actúan sobre el astronauta



$$(1) F_g' + N = \frac{M V^2}{r}$$

$$(2) F_g' - N = \frac{m v^2}{r}$$

Velocidad relativa.

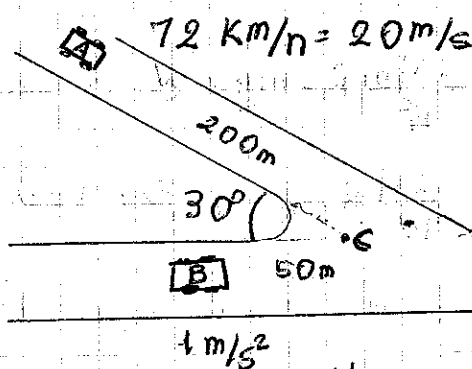


$$a) \underline{r}_{BA} = \underline{r}_{BO} - \underline{r}_{AO} = -\underline{r}_{AB}$$

$$b) \underline{v}_{BA} = \underline{v}_{BO} - \underline{v}_{AO} = -\underline{v}_{AB}$$

$$c) \underline{a}_{BA} = \underline{a}_{BO} - \underline{a}_{AO} = -\underline{a}_{AB}$$

Ejemplo 13: Dos autos A y B se acercan a un cruce donde uno de ellos (A) está a una distancia de 200m y viaja a una velocidad de 72 km/h. el auto B está a 50m y arranca con una aceleración de 1 m/s^2 a) encontrar la velocidad de A respecto a B cuando han transcurrido 4 seg. b) Se chocan los carros?



$$a) \underline{v}_{BA} = \underline{v}_{BT} - \underline{v}_{AT} = -\underline{v}_{AB}$$

$$\underline{v}_{BT}(4) = 4 \text{ m/s}$$

$$\underline{v}_{AT}(4) = 20 \text{ m/s}$$

$$\underline{v}_{AB} = \underline{v}_{AT} - \underline{v}_{BT}$$

Para hallar la magnitud de \underline{v}_{AB} :

$$v_{AB} = \sqrt{v_{AT}^2 + v_{BT}^2}$$

$$v_{AB} = \sqrt{v_{AT}^2 + v_{BT}^2} - 2v_{AT}v_{BT}$$

$$v_{AB} = \sqrt{v_{AT}^2 + v_{BT}^2 - 2|v_{AT}||v_{BT}|\cos\alpha} = 116$$

Para hallar la dirección de \underline{v}_{AB} :

$\underline{v}_{AB} = \underline{v}_{AT} - \underline{v}_{BT}$ Realizamos producto cruz.

con \underline{v}_{AT} por la izquierda:

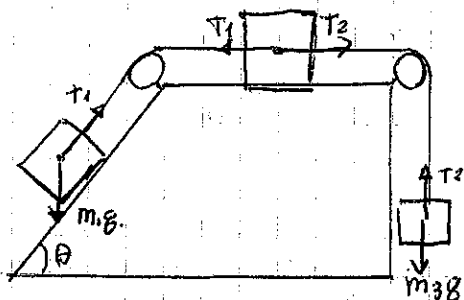
$$\underline{v}_{AT} \times \underline{v}_{AB} = \underline{v}_{AT} \times \underline{v}_{AT} - \underline{v}_{AT} \times \underline{v}_{BT}$$

$$\rightarrow \underline{v}_{AT} \times \underline{v}_{AB} = -\underline{v}_{BT} \times \underline{v}_{AT}$$

$$\rightarrow |v_{AT}| \times |v_{AB}| \sin\theta = |v_{BT}| |v_{AT}| \sin 30^\circ \text{ cancelamos } v_{AT} \text{ y}$$

$$|v_{AB}| \sin\theta = |v_{BT}| \sin 30^\circ \rightarrow \sin\theta = \frac{|v_{BT}|}{|v_{AB}|} \sin 30^\circ$$

Ejemplo 10: tres masas m_1, m_2, m_3 están conectadas como indica la figura, hallar la aceleración del sistema.

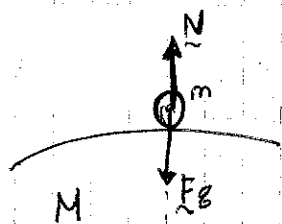


Se puede simplificar el problema sumando todo lo que va en dirección del movimiento y restandole todo lo que se le oponga. Esto sería igual a la masa del todo el sistema por tal aceleración:

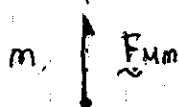
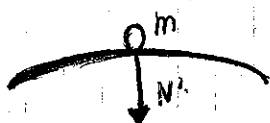
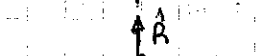
$$m_3 g - m_1 g \sin \theta = (m_1 + m_2 + m_3) a$$

Definición de Peso:

el peso se puede definir como la fuerza con que la tierra atrae a un cuerpo.



Fuerzas que actúan sobre m



$$\underline{F_g} = \underline{F_{mM}} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{R} = m\vec{g} = \underline{W} \text{ entonces}$$

$$\underline{Q} = -\frac{GM}{R^2} \hat{R} = \underline{g} \text{ y } \underline{F_g} + \underline{N} = 0$$

Nota: $\underline{F_g}$ y \underline{N} no son parejas de acción y reacción.

Como la tierra ejerce una fuerza gravitatoria $\underline{F_g}$ sobre el cuerpo, este le responde a M con una fuerza $\underline{F_{mM}}$ igual pero contraria.

Así mismo, como m espicha a la tierra con una fuerza $\underline{N'}$, entonces la tierra le responde con una fuerza \underline{N} , entonces podemos definir las parejas de acción y reacción.

$\underline{F_g}$ con $\underline{F_{mM}}$ son parejas de acción y reacción
 \underline{N} con $\underline{N'}$ son parejas de acción y reacción.
 como m está en reposo, entonces:

$|\underline{F_g}| = |\underline{F_{mM}}| = |\underline{N}| = |\underline{N'}|$ y como $\underline{MQ} = \underline{F_{mM}} + \underline{N'} = 0$, entonces también la tierra está en reposo.

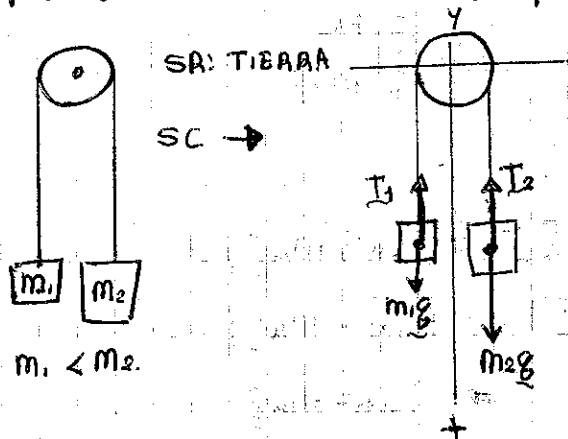
Ejemplo 11. un hombre en reposo con respecto a un ascensor con aceleración \underline{a} está sobre una balanza. determinar las fuerzas que actúan sobre él, la lectura de la balanza y las fuerzas que observa un observador en tierra. (pag 90).

$$T_x - F_{cb} = m_c \frac{dx}{dt} a \Rightarrow +x = F_{cb} + m_c \frac{dx}{dt} a$$

$$-T_x + F = m_c \frac{dx}{dt} a \quad +x = F_{cb} + m_c \frac{dx}{dt} \frac{F}{l(m_b + m_c)} x$$

"La tensión varra linealmente a lo largo de x ."

Ejemplo 8: hallar la Tensión y la aceleración en el sistema:



$$m_2 g + T_2 = m_2 a \quad (1)$$

$$m_1 g + T_1 = m_1 a \quad (2)$$

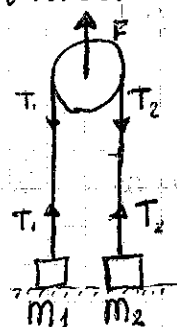
$$(1) \quad m_2 g \hat{j} - T \hat{j} = m_2 a \hat{j}$$

$$(2) \quad m_1 g \hat{j} - T \hat{j} = -m_2 a \hat{j}$$

$$(1) \quad m_2 g - T = m_2 a \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$(2) \quad -m_1 g + T = m_1 a$$

Ejemplo 9: dos cuerpos reposan sobre una superficie y están conectados a una polea. sobre la polea ejerce una fuerza F . hallar la ecuación del movimiento de los cuerpos.



Ecuación del movimiento para la polea.

$$F - 2T = m_p a \quad \text{dónde } m_p = 0, \text{ entonces, } F = 2T$$

$$\text{en } m_1: T + m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow T - m_1 g = m_1 a_1 \quad \text{despejando}$$

$$\text{en } m_2: T + m_2 g = m_2 a_2 \rightarrow T - m_2 g = m_2 a_2 \quad a_1 \text{ y } a_2$$

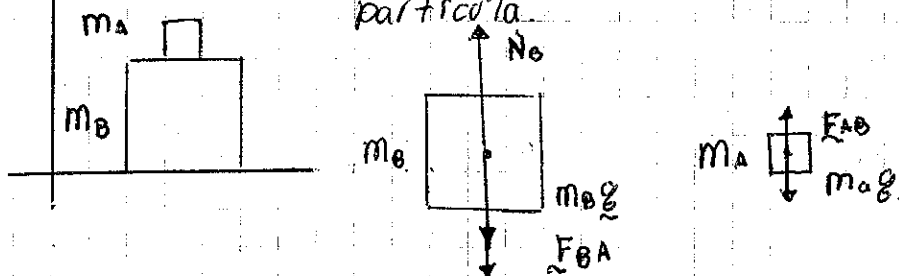
$$a_1 = \frac{T - m_1 g}{m_1} \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{T - m_2 g}{m_2} \rightarrow a_1 = \frac{F}{2m_1} - g \quad a_2 = \frac{F}{2m_2} - g$$

Nota: hay que tener en cuenta que si:

- $F < m_1 g \rightarrow a_1$ y a_2 son nulas.
- $m_1 g < F < m_2 g \rightarrow a_2$ es nula.

Solución de Problemas Aplicando las Leyes de Newton.

Ejemplo 6: Encontrar las fuerzas que actúan sobre cada partícula.



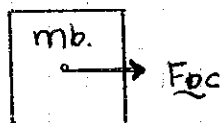
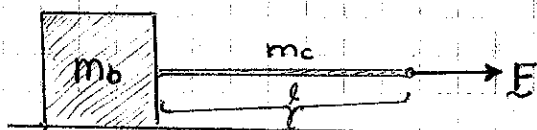
$$\Sigma F_B = \vec{N}_B + m_B \vec{g} + \vec{F}_{BA} = 0 \quad \Sigma F_A = \vec{F}_{AB} + m_A \vec{g} = 0.$$

$$\Sigma F_B = N_B \hat{j} - m_B g \hat{j} - F_{BA} \hat{j} = 0 \quad \Sigma F_A = F_{AB} \hat{j} - m_A g \hat{j} = 0.$$

$$\rightarrow N_B = m_B g + F_{BA}$$

$$\rightarrow F_{AB} = m_A g$$

Ejemplo 7: un cuerpo de masa m_b está conectado a una cuerda de masa m_c . ¿Cómo varía la tensión a lo largo de la fuerza? Nota: la cuerda es inextensible.



$$F_{bc} = m_b a_b \quad (1)$$

$$F + F_{cb} = m_c a_c \text{ donde } (2)$$

$$a_b = a_c = a \text{ entonces}$$

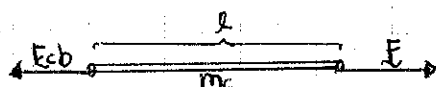
$$(1) a = \frac{F_{bc}}{m_b} \text{ reemplazamos } a \text{ en } (2)$$

$$(2) F = -F_{cb} + m_c \left(\frac{F_{bc}}{m_b} \right)$$

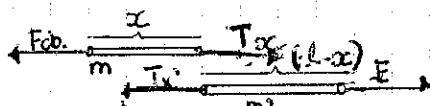
$$\text{como } F_{cb} = -F_{bc}, \text{ entonces } F = \left(1 + \frac{m_c}{m_b} \right) F_{bc} = \frac{m_b + m_c}{m_b} F_{bc} \text{ entonces}$$

$$F_{bc} = \frac{m_b F}{m_b + m_c} \text{ si } m_c \ll m_b \text{ entonces } F_{bc} \approx F$$

Variación de la tensión a lo largo de la cuerda



$$T_x = -T'_x \text{ entonces.}$$



$$T_x + F_{cb} = (m_c \frac{x}{l}) a \quad \wedge \quad F + T'_x = \left(m_c \frac{l-x}{l} \right) a$$

$$T_x - F_{cb} = m_c \frac{x}{l} a \quad \wedge \quad F - T_x = m_c \frac{(l-x)}{l} a$$

$$\begin{aligned} m &\rightarrow \frac{l}{l} \Rightarrow m = m_c \frac{x}{l} \\ \frac{m}{m'} &\rightarrow \frac{x}{(l-x)} \Rightarrow m' = m_c \frac{(l-x)}{l} \end{aligned}$$

Definimos T el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta, que lo llamamos periodo, entonces.

$$\omega = \frac{\text{radianes}}{t} = \frac{2\pi}{T} \text{ donde } \omega \propto \frac{1}{T} \text{ inversamente proporcionales.}$$

definimos $\nu = \frac{1}{T}$ como el número de vueltas que da la partícula en determinado tiempo, llamada frecuencia y expresada en: vueltas/seg, ciclos/seg, rev/s, ó HERTZ (Hz).

Ejemplo 5: La ionósfera es una parte de la atmósfera que está a 200 km de altura. Ella está compuesta por gas electrónicamente neutro, conformado por iones positivos y negativos. Si una onda de radio pasa a través de la ionósfera, acelera las partículas de gas. Como el campo eléctrico oscila es de esperar que las partículas también lo hagan. Encontrar el movimiento de una carga $q = -e$ (carga de un electrón) de un electrón que está inicialmente en reposo, suponiendo que el campo eléctrico está dado por $E = E_0 \sin \omega t$.
 \longleftrightarrow Amplitud del campo $t_0 = 0$
 E_0 $\rightarrow V_0 = 0$.

Rta. $F = E q$ donde $q = -e$. entonces, $F = -e E_0 \sin \omega t$ entonces,

$$a = -\frac{e}{m} E_0 \sin \omega t \rightarrow a_x = -\frac{e}{m} E_0 \sin \omega t = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\rightarrow v_x = \int -\frac{e E_0}{m} \sin \omega t dt = -\frac{e E_0}{m \omega} \int \sin \omega t (d\omega t) = \frac{e E_0}{m \omega} \cos \omega t + C$$

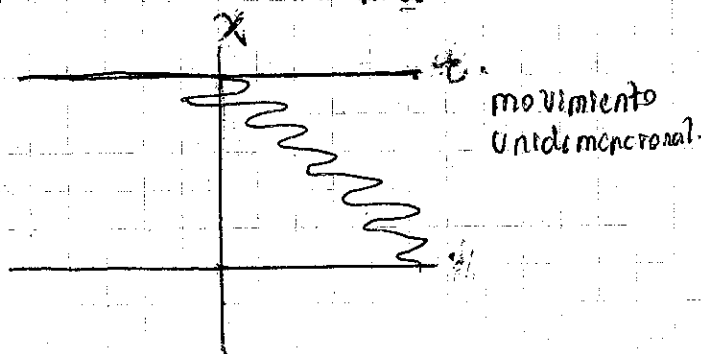
Para hallar la constante, afirmamos que $v(0) = 0$, entonces.

$$v_x(0) = \frac{e E_0}{m \omega} (1) + C = 0 \rightarrow C = -\frac{e E_0}{m \omega}$$

$$v_x = \frac{e E_0}{m \omega} (\cos \omega t - 1) = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int_0^t \frac{e E_0}{m \omega} (\cos \omega t - 1) dt = \frac{e E_0}{m \omega} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \right]_0^t$$

$$x = \frac{e E_0}{m \omega^2} (\sin \omega t - t) = \frac{e E_0}{m \omega^2} (\sin \omega t - \omega t)$$



Radio de curvatura

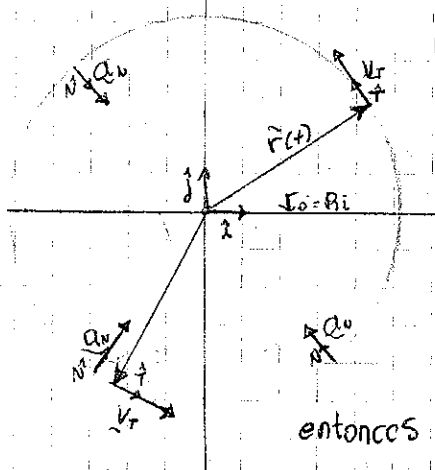
$$\rho = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \quad \text{donde } [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\omega \sin \omega t & R\omega \cos \omega t & 0 \\ -R\omega^2 \cos \omega t & -R\omega^2 \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} = |R^2 \omega^3 \hat{k}| = R^2 \omega^3$$

$\rho = \frac{R^3 \omega^3}{R^2 \omega^3} = R$. El radio de curvatura es constante, y tiene la magnitud del vector posición.

Forma de la trayectoria.

$x = R \cos \omega t$. elevamos al cuadrado a ambos lados y sumamos las
 $y = R \sin \omega t$. ecuaciones!

$x^2 + y^2 = R^2$ la partícula describe un círculo



Para hallar el vector unitario tangente:

$$\mathbf{v} = v \hat{T} \rightarrow \hat{T} = \frac{\mathbf{v}}{v} = -\sin \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{j}$$

Para hallar a_T y a_N utilizamos la fórmula.

$$\mathbf{a} = a_T \hat{T} + a_N \hat{N} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N}$$

a_T es nula porque v es constante.

$$\text{entonces } a_N = a \hat{N} = \frac{v^2}{\rho} \hat{N} = \frac{R^2 \omega^2}{R} \hat{N} = R \omega^2 \hat{N}$$

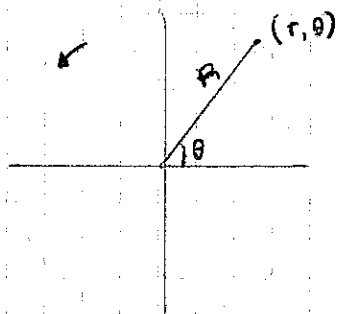
donde $\hat{N} = -\cos \omega t \hat{i} - \sin \omega t \hat{j}$ (\hat{N} va en dirección opuesta a \hat{r}).

En este caso a recibe el nombre de aceleración centrípeta, porque está dirigida hacia el centro, que es condición necesaria para que haya movimiento circular uniforme.

Fuerza que actúa sobre la partícula.

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = -m \omega^2 \mathbf{r} \quad \text{que también es centrípeta.}$$

Movimiento descrito en coordenadas polares



R es constante, definimos el ángulo formado respecto al tiempo:

$\varphi = \omega t \Rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt}$. dicha variación del ángulo en el tiempo (ω) la denominamos rapidez angular, que se da en s^{-1} (radianes/segundo)

f) Distancia total recorrida

$$s = \int_a^b ds \quad \text{donde } ds = dr$$

$$\Rightarrow s = \int_{t_0}^t \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^t v dt = \int_0^{+v} \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2} dt$$

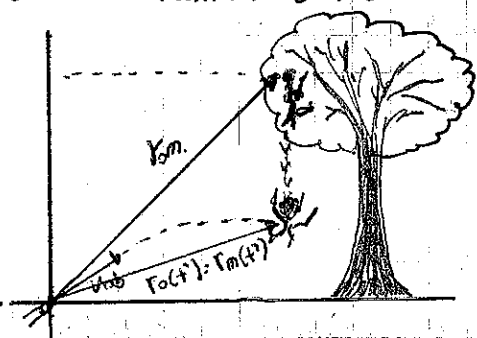
$$s = \frac{v_0^2}{2g} [2 \sin \alpha - \cos^2 \alpha \ln \left| \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right|]$$

Ejemplo 2: Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{g}$ y $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$

Ejemplo 3: Rango máximo.

$$R = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \rightarrow \text{es máximo cuando } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo 4: Un cazador apunta a un mico con una carabina, en el momento en que dispara el mico se suelta de la rama. Como debe apuntarle al mico para cazarlo.



$$(1) r_m(t) = r_{0m} + \frac{v_{0m}}{2m_m} t^2 = r_{0m} + \frac{1}{2} g t^2$$

$$(2) r_b(t) = v_{0b} t + \frac{1}{2} g t^2$$

hallamos t' en donde $r_b(t') = r_m(t')$.
(La bala le pega al mico)

$$r_{0m} + \frac{1}{2} g t'^2 = v_{0b} t' + \frac{1}{2} g t'^2, \text{ entonces}$$

$r_{0m} = v_{0b} t'$: los dos vectores tienen que ser paralelos.

270891 Movimiento circular Uniforme.

Una partícula se mueve de tal forma que su vector posición en función del tiempo viene dado por la siguiente expresión:

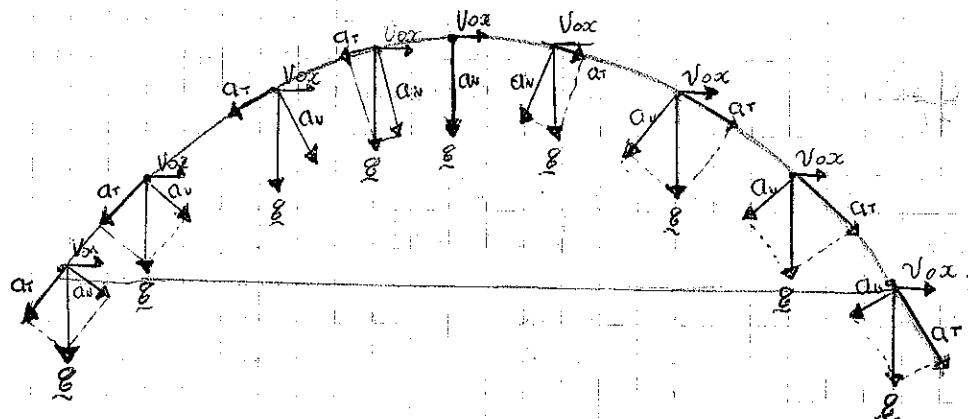
$$r(t) = R \cos \omega t \hat{i} + R \sin \omega t \hat{j} \quad \text{con } R \text{ y } \omega \text{ constantes positivas}$$

El sistema de coordenadas es un plano en donde:

$$v(t) = -R\omega (\sin \omega t \hat{i} - \cos \omega t \hat{j}) \rightarrow v = R\omega, \text{ la rapidez de la partícula es constante.}$$

$$a(t) = -R\omega^2 (\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}) \rightarrow a = R\omega^2$$

e) Aceleración tangencial y normal y radio de curvatura.



$$\underline{g} = \underline{a}_T + \underline{a}_N = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N} \quad \begin{matrix} V_x = V_{0x} \\ V_y = V_{0y} - gt \end{matrix} \text{ entonces:}$$

$$V(t) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2}$$

$$\underline{a}_T = \frac{dV}{dt} \hat{T} = \frac{-2(V_{0y} - gt)g \hat{T}}{2\sqrt{V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2}} = -\frac{g(V_{0y} - gt)}{\sqrt{V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2}} \hat{T}$$

Nota: cuando $V_y = (V_{0y} - gt) \geq 0 \rightarrow a_T \leq 0$.
 cuando $t < t_s \rightarrow a_T = -k \hat{T}$
 cuando $t > t_s \rightarrow a_T = k \hat{T}$

$a_N = g - a_T$, como forman un triángulo rectángulo, entonces:

$$\begin{aligned} a_N^2 + a_T^2 &= g^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{g^2 - a_T^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2(V_{0y} - gt)^2}{V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2}} \\ &= \frac{V_{0x} g}{\sqrt{V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2}} \end{aligned}$$

Para calcular ρ utilizamos $a_N = \frac{v^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$

$$\rho = \frac{[V_{0x}^2 + (V_{0y} - gt)^2]^{3/2}}{V_{0x} g} \Rightarrow \rho(t_s) = \frac{V_{0x}^2}{g}$$

Ejemplo 1: sea $\alpha = 45^\circ$ hallar la relación entre y_{\max} y $\rho(t_s)$

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0 \cos \alpha = V_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \rho(t_s) = \frac{V_0^2}{2g} & y_{\max} &= \frac{V_{0y}^2}{2g} = \frac{V_0^2}{4g} \\ V_{0y} &= V_0 \sin \alpha = V_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\rho(t_s) = 2 y_{\max}$$

Variación de la rapidez respecto a la posición: (Pag 83B).

$$V^2 = V_0^2 + 2a(r-r_0) \Rightarrow V^2 = V_0^2 - 2g(x), \text{ entonces.}$$

$$V_x^2 + V_y^2 = V_{0x}^2 + V_{0y}^2 - 2g_j \cdot (x_i + y_j)$$

$$\boxed{V_x^2 + V_y^2 = V_{0x}^2 + V_{0y}^2 - 2g_j y_j} \quad (7)$$

Nota: si en 7 $y=0$, se puede demostrar que la velocidad de partida tiene la misma magnitud que la velocidad de llegada.

a) tiempo en que el cuerpo dura en el aire.

$$(4) \quad V(t) = V_{0y} - gt = 0 \text{ cuando } t = \frac{V_{0y}}{g}; \text{ tiempo de subida. } (t_s)$$

$$(6) \quad Y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \text{ cuando } t = 2\frac{V_{0y}}{g}; \text{ tiempo de vuelo. } (t_v)$$

Nota, el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada. $2t_s = t_v = 2t_0$

b) Distancia horizontal recorrida. (Rango de movimiento, en este caso, donde $y_{in} = y_{fin}$)

$$X_{\max} = R = X(t_v) = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g} = \frac{2V_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

c) Altura máxima alcanzada.

$$Y_{\max} = Y(t_s) = \frac{V_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{V_{0y}^2}{g^2} = \frac{V_{0y}^2}{2g}$$

$$\text{Velocidad Final: } V(t) = V_0 - g_j t \text{ si } t = t_v = \frac{2V_{0y}}{g}$$

$$V(t_v) = V_{0x} + V_{0y} - \frac{2gV_{0y}}{g} = \boxed{V_{0x} - V_{0y}}$$

La magnitud de la velocidad es idéntica, pero la componente en el eje y presenta la misma magnitud y de signo contrario.

d) Forma de la trayectoria: hay que expresar y como función de x

$$x(t) = V_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x}{V_{0x}}$$

$$y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y = V_{0y} \frac{x}{V_{0x}} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_{0x}^2} \leftarrow \text{Parábola invertida}$$

Ecuación de movimiento: Ley de Coulomb: $F_{EA} = K \frac{q_A q_B}{r^2} \hat{r}_{BA}$, dividimos

Por q_B y nos queda $\frac{F_{EA}}{q_B} = K \frac{q_A}{r^2} \hat{r}$ donde \hat{r} parte de q_A definimos como campo eléctrico E producido por $q_A = q$, el cociente entre F_E/q_B . Entonces obtenemos que:

$$\boxed{E = K \frac{q}{r^2} \hat{r}}$$

$$\text{y } \boxed{F_E = q_B E}$$

que son la ecuación del campo gravitacional de una carga y la ecuación del movimiento, respectivamente.

230891. Movimiento parabólico.

Un objeto es lanzado con V_0 que forma un ángulo α con la horizontal, desde la superficie de la tierra el objeto se mueve solamente bajo la influencia de la atracción gravitacional. Se omite la resistencia del aire y el desplazamiento es mucho menor que el radio de la tierra, se busca encontrar:

- tiempo en que el cuerpo dura en el aire.
- Distancia horizontal recorrida.
- Altura máxima alcanzada.
- La forma de la trayectoria.
- La aceleración tangencial, la normal y el radio de curvatura.
- La distancia total recorrida, (longitud del arco.).

PASO 1: escoger un sistema de referencia adecuado: observador en la tierra.

PASO 2: escoger un sistema de coordenadas apropiado: uno de los ejes paralelo a la fuerza de gravedad, otro en dirección al desplazamiento a lo largo de la superficie; así el problema se reduce al movimiento en el plano, además, se hace que el origen del sistema coincida con el punto donde parte el objeto, entonces, $t_0 = 0$, $r_0 = 0$ y $V_0 = V(0)$.

PASO 3: manejo de fórmulas de las leyes de Newton:

$$F = W = mg(-\hat{j}) = ma \Rightarrow a = -g\hat{j} \text{ donde } a = \frac{dv}{dt}, \text{ entonces,}$$

$$\int_{V_0}^V dv = -g\hat{j} \int_{t_0}^t dt \Rightarrow V - V_0 = -g\hat{j}(t - t_0) \Rightarrow V(t) = V_0 - gt\hat{j} \quad (1)$$

Variación de V respecto a t : $V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k} = V_{0x}\hat{i} + V_{0y}\hat{j} + V_{0z}\hat{k} - gt\hat{j}$

$$\text{Entonces: } \begin{aligned} V_x(t) &= V_{0x} & (2) \\ V_y(t) &= V_{0y} - gt & (3) \\ V_z(t) &= 0 \end{aligned}$$

Variación del \vec{r} respecto a t : $\vec{r}(t) = V_0 t + \frac{1}{2}gt^2\hat{j} \quad (4)$.

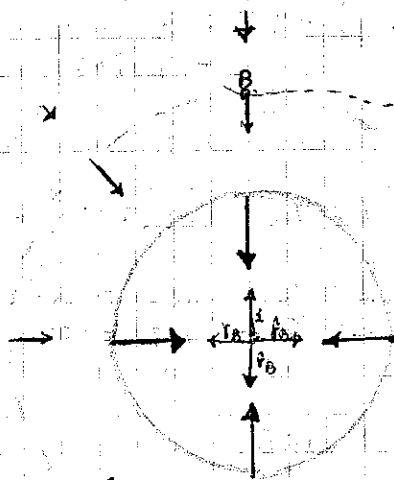
$$\text{Entonces } \vec{r}(t) = V_{0x}t \quad (5)$$

$$y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6)$$

Campo gravitacional: es una propiedad que crea todo cuerpo en el espacio. dicho campo ocupa todo el espacio en una forma densa, siempre está dirigida hacia la masa del cuerpo y disminuye al aumentar la distancia. Matemáticamente, el campo se hace cero a una distancia infinita, pero, físicamente a distancias relativamente grandes esta cantidad se hace irrelevante.

g en todos los puntos de una circunferencia con centro en m y radio r , siempre tiene la misma magnitud, pero una dirección diferente (hacia el centro)

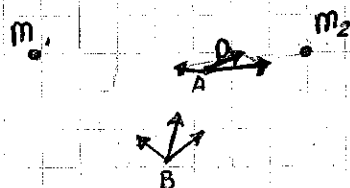
Si colocamos una partícula P sobre el punto A , sobre él actúa una fuerza, que es el producto de su masa por la aceleración gravitacional. ($m_B g = F_B = W$) dicha fuerza la llamamos peso. / es constante en dir. y mag.



Si P se traslada de A y B , encuentra una nueva dirección de la fuerza en el campo. esta situación a regla parcialmente el problema de la acción a distancia de la tercera ley de Newton.

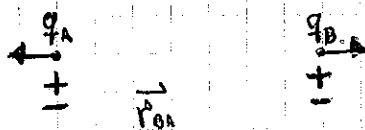
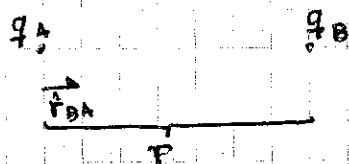
ahí radica la importancia de introducir el concepto de campo gravitacional. Para cosas pequeñas B

Campo gravitacional de varias masas: es un campo distorsionado, pues ya no presenta simetría esférica, aunque presenta líneas equipotenciales como en el anterior, la acción gravitacional en un punto determinado es la suma de las acciones individuales



Para hallar la atracción gravitacional que siente P por la acción de las masas m_1 y m_2 , se suman vectorialmente la acción de cada campo por separado.

Fuerza electrostática:



Ley de Coulomb

$$F_{BA} = K \frac{q_A q_B}{r^2} \hat{r}_{BA} \text{ con } K = 8,99 \times 10^9 \frac{N}{m^2 c^2}$$

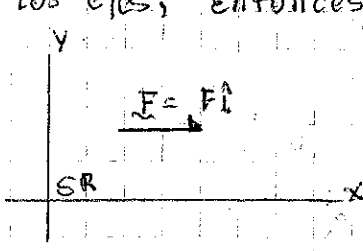
Signo de la fuerza

F_{BA} con dirección \hat{r}_{BA} Fuerzas dirigidas hacia afuera. se repelen
 F_{AB} con dirección $-\hat{r}_{BA}$

F_{BA} con dirección $-\hat{r}_{BA}$ Fuerzas dirigidas hacia adentro. se atraen.
 F_{AB} con dirección \hat{r}_{BA}

Fuerza y Sistema de coordenadas.

Para mas claridad en los problemas de Física es aconsejable orientar la fuerza neta de una de una partícula hacia uno de los ejes, Entonces:



$$V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k} = V_{0x} \hat{i} + V_{0y} \hat{j} + V_{0z} \hat{k} + \frac{F_i}{m} (t - t_0).$$

$$x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k} + (V_{0x} \hat{i} + V_{0y} \hat{j} + V_{0z} \hat{k})(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m} (t - t_0)^2 \hat{i}$$

Iguando los términos de los vectores obtenemos:

$$V_x = V_{0x} + \frac{F_i}{m} (t - t_0) \quad x = x_0 + V_{0x} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{F_i}{m} (t - t_0)^2$$

$$V_y = V_{0y} \quad y = y_0 + V_{0y} (t - t_0)$$

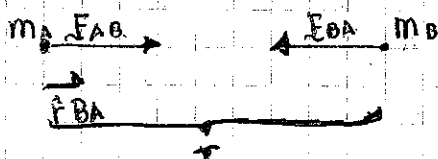
$$V_z = V_{0z} \quad z = z_0 + V_{0z} (t - t_0)$$

Movimiento en el Plano.

Supongamos que $V_{0z} = 0$ entonces $V_z = 0$ y podemos hacer $Z = Z_0 = 0$ y el movimiento se nos reduce al plano.

Movimiento con Fuerza constante (Gravitacional y eléctrica).

Fuerza Gravitacional



Por el tercer postulado sabemos que:

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

definimos \hat{r}_{BA} un vector unitario que va hacia B partiendo de A. y llamamos r la distancia entre las partículas.

La ecuación general del movimiento del cuerpo B debida a A (fuerza atractiva) se plantea así:

$$F_{BA} = m_B a_B = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \hat{r}_{BA} \text{ donde } G = 6,673 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Propiedades deducidas de la ecuación general:

$$a_B = -\frac{G m_A}{r^2} \hat{r}_{BA} \text{ Se observa que } a_B \text{ depende de las propiedades de A.}$$

Supongamos que: $m_A = M_T \approx 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ y $r = r_T = 6,370 \text{ km}$.
entonces $a_B = g \approx 9,83 \text{ m/s}^2$ esta está dirigida hacia el centro de la Tierra.

$$x(t) = x(t_0) + v(t)(t-t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t I dt$$

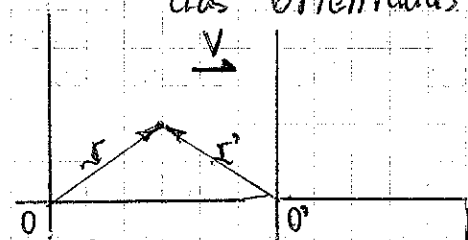
Si conozco el estado inicial conozco el futuro de la partícula, y su pasado, todo queda determinado absolutamente. este es el modelo de la FÍSICA CLÁSICA DETERMINISTA

Casos particulares

① Si $F=0 \rightarrow p = p(t_0)$ y $r(t) = r(t_0) + v(t_0)[t-t_0]$.

② Si $F=cste \rightarrow p(t) = p(t_0) + E(t-t_0)$ y $r(t) = r(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2m} F(t-t_0)^2$ $\left\{ \begin{array}{l} I = \int_{t_0}^t F dt = F(t-t_0) \text{ entonces} \\ \int_{t_0}^t I dt = \int_{t_0}^t F(t-t_0) dt = \frac{1}{2} F (t-t_0)^2 \end{array} \right.$

200891. Transformaciones de Galileo en sistemas de coordenadas Orientadas



Condiciones especiales:

v orientada en el eje x .

Ejes mutuamente paralelos

O' pasa por O en $t=t'=0$. entonces $OO' = vt$.

bajo estas condiciones, las transformaciones de Galileo quedan así:

$$r = r' - OO' \Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} - v\hat{i}t$$

$$\Rightarrow x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z$$

$$\Rightarrow v_x' = v_x - v \quad v_y = v_y' \quad v_z = v_z'$$

Variación de la velocidad respecto a la posición:

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2$$

$$x(t) = v_0^2 + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \quad \text{entonces}$$

$$v(t)^2 = v_0^2 + 2v_0 a(t-t_0) + a^2(t-t_0)^2$$

$$v(t)^2 = v_0^2 + 2a[v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2] \Rightarrow \text{que es igual a } (r-r_0)$$

$$v(t)^2 = v_0^2 + 2a(t(t_0) - r_0) \quad \text{Variación de la } v \text{ en función de } x.$$

Otra Forma.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dv = a dt \quad \text{multiplicando a ambos lados por } dx$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} dv = a dx \Rightarrow \int_{v_0}^v v dv = \int_{r_0}^r a dr \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a_0(r - r_0)$$

A partir de este principio de conservación podemos redefinir los tres postulados de Newton:

Primer postulado: Exista al menos un sistema inercial de Referencia en donde respecto a él el momentum de un sistema (Partícula) libre o aislado es constante.

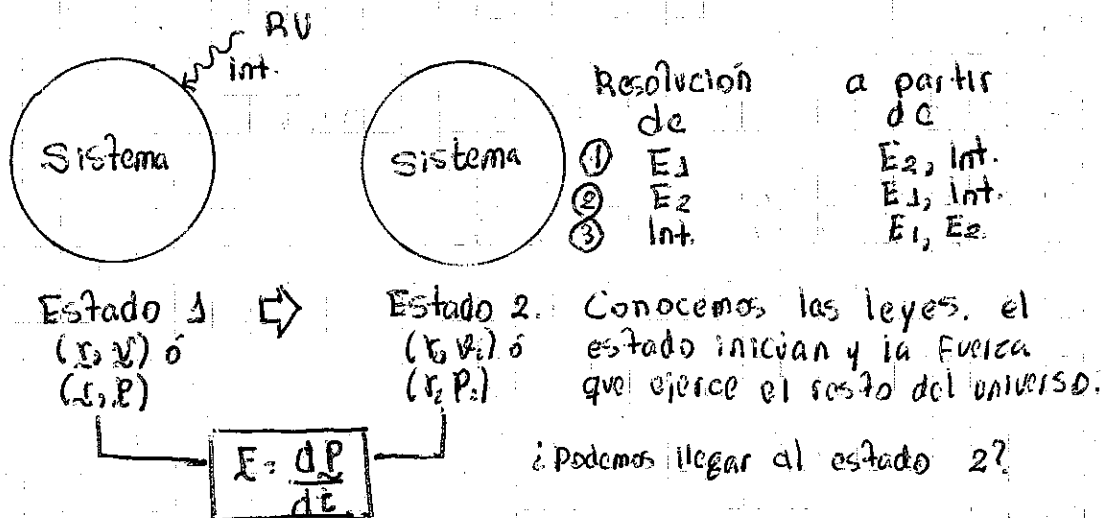
Segundo Postulado: si un sistema interactúa con el resto del universo durante un intervalo de tiempo Δt su momentum cambia en una cantidad ΔP tal que: $\Delta P = F \Delta t$ donde F es la resultante de las dos las interacciones denotado $\sum F_i$.

$$F = \sum F_i = \sum \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum p_i = \frac{dP}{dt} \Rightarrow \boxed{\Delta P = F \Delta t}$$

Nota: si se trabaja con sistemas no inerciales hay que introducir fuerzas ficticias, que, como ya se definió, son el producto de la masa de la partícula por la aceleración del Sistema de Referencia

Tercer Postulado: se puede considerar un caso particular de la ley de conservación del momentum, donde se plantea explícitamente cómo es la interacción entre dos sistemas (Partículas)

Problema fundamental de la física clásica (Mecánica)



Resolución: $dP = F dt \Rightarrow \int_{P_0}^P dP = \int_{t_0}^t F dt \Rightarrow P(t) - P_0 = \int_{t_0}^t F dt$

$\Rightarrow P(t) = P(t_0) + \int_{t_0}^t F dt$

donde $P(t_0)$ es conocido y $\int_{t_0}^t F dt$ es lo que llamamos impulso y es equivalente al cambio de momentum del sistema.

$\Rightarrow m \frac{d\underline{r}}{dt} = m \underline{v}(t_0) + \underline{I}$

dividimos por la masa y...

$\Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}(t_0) + \frac{1}{m} \underline{I} \Rightarrow \int_{\underline{r}(t_0)}^{\underline{r}(t)} d\underline{r} = \int_{t_0}^t [\underline{v}(t_0) + \frac{1}{m} \underline{I}] dt$

Tercera ley de Newton:

Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual.
(acción de distancia entre cuerpos)

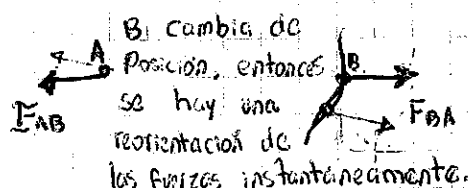
F_{AB} : F sobre A debido a B

F_{BA} : F sobre B debido a A

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

Nota: Las fuerzas de acción y reacción nunca se equilibran entre sí porque actúan sobre cuerpos diferentes.

El inconveniente que presenta la tercera ley de Newton consiste en que se supone que en la acción a distancia entre cuerpos muy separados implica que la variación de la cantidad de movimiento se transmite instantáneamente, y ocurre simultáneamente la causa y efecto. Aunque el principio funciona bien dentro del marco de la física clásica, se ha replanteado el problema introduciendo el concepto de campo gravitatorio producida por los cuerpos, cuyas variaciones se transmiten a la velocidad de la luz.



A partir de la tercera ley se puede llegar al concepto de la conservación de Cantidad de movimiento.

Si sobre dos cuerpos A y B no hay fuerzas aplicadas, entonces los dos forman un sistema aislado, pero A y B no son libres (considerándose como dos sistemas) entonces describen una trayectoria.

$$F_{AB} = -F_{BA} \Rightarrow m_A a_A = -m_B a_B \Rightarrow m_A a_A + m_B a_B = 0$$

$$\Rightarrow m_A \frac{dV_A}{dt} + m_B \frac{dV_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_A V_A + m_B V_B) = 0$$

$$\boxed{m_A V_A + m_B V_B = K}$$

Ley de conservación del momentum.

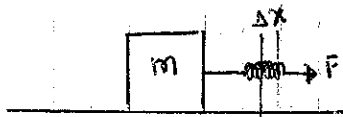
La importancia del momentum, definida como el producto de la masa por la velocidad de un cuerpo radica en que conecta la propiedad dinámica (m) y la cinemática (V) de un sistema. Además, esta ley de conservación es válida para todos los rangos de la física, cosa que no sucede con el tercer postulado de Newton.

El momentum de un sistema es la suma del momentum de cada una de las partículas, si dicho momentum se conserva ($P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = cte$) se dice que el sistema está aislado.

Principio de Superposición

EXPERIMENTO 3

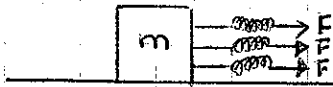
$$a = \frac{F}{m}$$



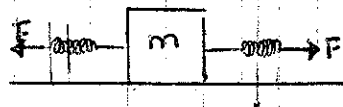
a



$2a$



$3a$



$a=0$

La aceleración a producida por varias fuerzas que actúan sobre un cuerpo (sistema) es igual a la suma vectorial de las aceleraciones que producirían cada una de las fuerzas actuando independientemente.

$$F_j = a_j m; \quad \sum_{j=1}^n m a_j = \sum_{j=1}^n F_j$$

$$\rightarrow m \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n F_j$$

$$\rightarrow m a = F$$

Teorema 2:

Si un observador inercial ve que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es F , cualquier otro observador inercial verá la misma fuerza.

Demostración:

$$r = r' + \vec{OO'} \rightarrow r' = r - \vec{OO'}$$

$$\rightarrow \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt} - \frac{d\vec{OO'}}{dt} \rightarrow v' = v - V$$

$$\rightarrow \frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{dV}{dt} \text{ Pero } V \text{ es constante.}$$

$$\rightarrow a' = a \text{ por lo tanto } F' = F$$

Esto permite definir el principio de la relatividad clásica:

"TODAS LAS LEYES DE LA FÍSICA SON LAS MISMAS EN TODOS LOS SISTEMAS INERCIALES DE REFERENCIA."

Transformación de Coordenadas (transformación galileana).

$r' = r - \vec{OO'}$ ley de transformación de coordenadas de Galileo.

$v' = v - V$ regla de adición de velocidades de Galileo.

$a = a' \rightarrow F = F'$ principio de Relatividad de Galileo.

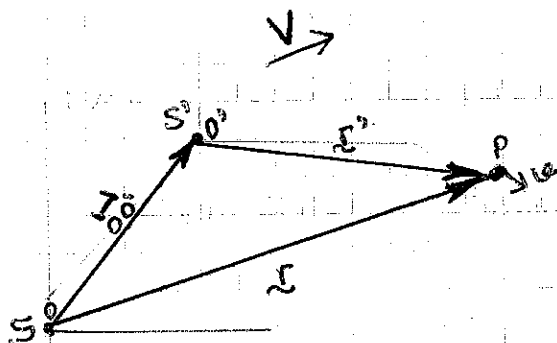
Fuerzas Ficticias: si O' no fuera inercial entonces pasaría lo siguiente:

$r = r' - \vec{OO'}$ $\rightarrow v = v' - V$ donde V ya no es constante, entonces:

$a = a' - \frac{dv'}{dt} \rightarrow ma = F - m \frac{dv'}{dt}$ donde F es la fuerza real observada por O y $m \frac{dv'}{dt}$

es una fuerza que llamamos ficticia, que no proviene de interacciones. Si para O el cuerpo fuese libre ($F=0$) Para O' no inercial $F = -m \frac{dv'}{dt}$ y el cuerpo no sería libre.

Demostración:



- S es un SIA.
- P se mueve con velocidad constante respecto a S.
- El tiempo es absoluto. ($dt = dt'$)
- \underline{V} : velocidad entre S y S'
- \underline{u} : velocidad de P, vista desde S.
- $\underline{u'}$: velocidad de P, vista desde S'

$$\underline{r} = \underline{OO'} + \underline{r'} \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{OO'}}{dt} + \frac{d\underline{r'}}{dt} \Rightarrow \underline{u} = \underline{V} + \underline{u'}$$

$\Rightarrow \underline{u'} = \underline{u} - \underline{V}$ como tanto \underline{u} como \underline{V} son constantes se deduce que

$$\underline{u'} = \text{cte.}$$

Conclusiones:

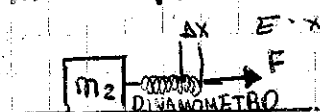
- Si existe un SIA hay infinitos sistemas inerciales de referencia.
- Para todos los cuerpos que se muevan con \underline{V} cte las leyes de Newton son válidas.

Segunda ley de Newton.

En un sistema de referencia inercial $\underline{F} = m\underline{a}$.

Los grandes críticos de la teoría de Newton, entre ellos Ernest Mach, estiman el hecho de que Newton no define claramente la masa ni dice cómo medirla.

Masa Operacional:



Se observa que $a_2 < a_1$. entonces

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \dots \frac{m_3}{m_i} = \frac{m_1}{a_3} \dots \frac{m_i}{m_1} = \frac{a_1}{a_i}$$

Varios experimentos

$$\Rightarrow m_i = m_1 \frac{a_1}{a_i} \text{ si } m_1 = 1 \text{ Kg. entonces.}$$

$$m_i = \frac{a_1}{a_i} \text{ Kg.}$$

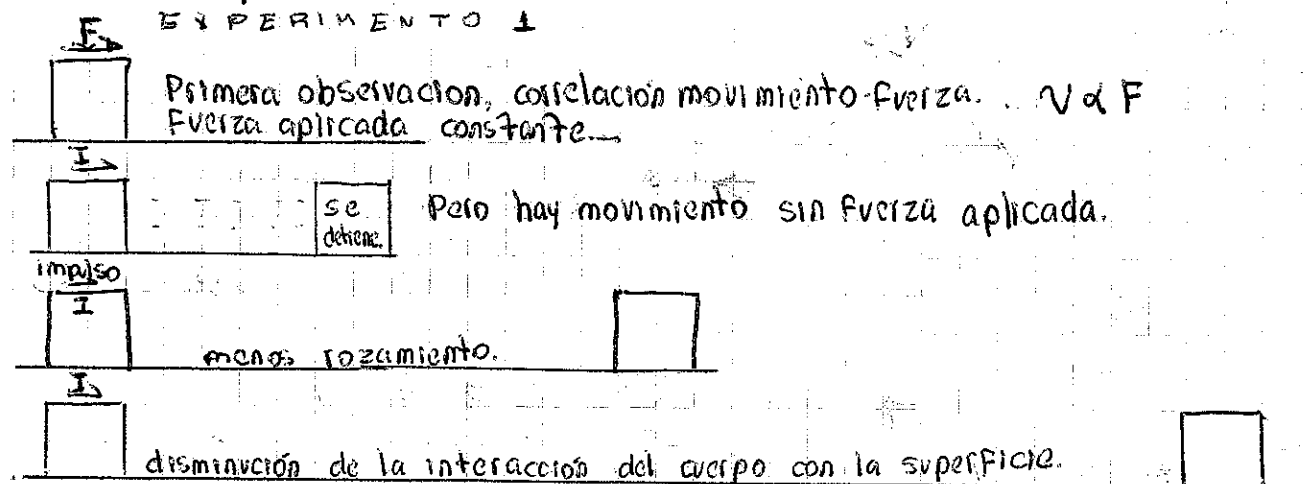
Se puede definir masa operacional como la relación de las aceleraciones respecto a la aceleración de la masa patrón.

$$\text{Si } m_i = m_1 \rightarrow a_i = a_1$$

$$\text{Si } m_i > m_1 \rightarrow a_i < a_1$$

$$\text{Si } m_i < m_1 \rightarrow a_i > a_1$$

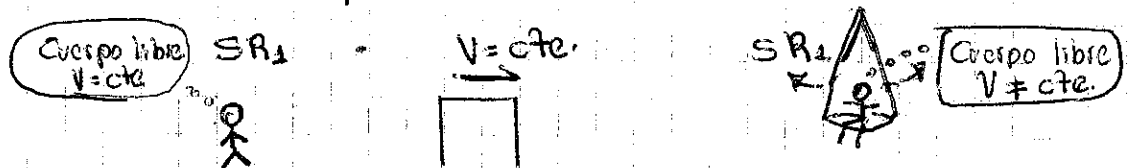
Primera ley de Newton



Conclusión: Si no actúan fuerzas externas, permanece en reposo o con velocidad constante.

ii. $V \propto F$

Sistemas libres son aquellos donde la fuerza neta es nula. Un sistema de referencia para Newton es el espacio absoluto indetectable.



Existen SR donde la primera ley de Newton es válida y existen SR donde no es válida.

Formulación del primer postulado:

Existe al menos un sistema de referencia (SR) en el cual un cuerpo no sometido a fuerzas externas se mueve con velocidad constante. Dicho SR lo llamamos sistemas Inerciales de Referencia y los demás sistemas de referencia no inerciales.

Se podría decir que el primer postulado es un caso especial del segundo porque $F = ma$ pero si $F = 0 \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow V = cte$

Pero en dicha suposición no se define un sistema de referencia para asegurar que dicha ley es válida.

Teorema: Si se tiene un SR cualquier otro SR que se mueva con velocidad constante respecto a él es también un sistema inercial de referencia.

$$V = \frac{dx}{dt} = cte \leftrightarrow V' = \frac{dx'}{dt} = cte$$

DINAMICA

Postulados de Newton.

Principios Matemáticos de la Filosofía Natural:

Isaacs Newton.

"La cantidad de materia es la medida de la misma tomada de su densidad y su longitud."

"La cantidad de movimiento es la medida del mismo surgida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente."

"La fuerza incita de la materia es un poder de resistencia de todos los cuerpos en cuya virtud perseveran cuando está en ellos por mantenerse en su estado actual ya sea en reposo o en movimiento uniforme rectilíneo."

"La fuerza impresa es una acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado ya sea de reposo o de movimiento rectilíneo."

Escolios:

"Tiempo: absoluto, verdadero, y matemático en si y por su propia naturaleza sin relación a nada externo. Fluye uniformemente y sin relación a nada externo."

"Espacio: absoluto, tomado de la naturaleza sin relación a nada externo, es permanente, inmóvil, similar e inobservable."

Axiomas de Newton:

I "Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo a que se vean forzados a cambiar su estado por fuerzas impresas."

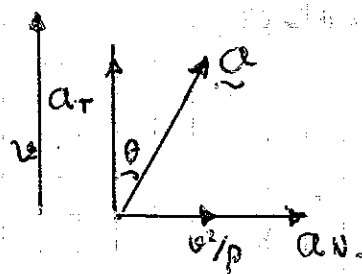
II "El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza."

III "Para toda acción hay siempre una reacción opuesta o igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre si son siempre iguales pero dirigidos hacia partes contrarias."

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| \hat{N} = \frac{1}{\rho} \hat{N} \rightarrow a = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N}$$

• Ejercicios:

Demostrar que: $\rho = \frac{v^3}{|v \times a|}$



Solución:

$$① |v \times a| = v \times (a_t + a_n) = v \times a_n$$

$$② |v \times a| = |v| |a| \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{|v \times a|}{|v| |a|} = \frac{v \times a_n}{|v| |a|} = \frac{a_n}{|a|}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{a_n}{|a|} = \frac{v^2/\rho}{|a|}$$

$$② \Rightarrow |v \times a| = |v| |a| \frac{v^2/\rho}{|a|} \rightarrow |v \times a| = \frac{v^3}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{v^3}{|v \times a|}$$

APENDICE 1. SISTEMAS DE UNIDADES

Sistema métrico. (masa, longitud, tiempo).

CANTIDAD Sub. Física Sistema	Fuerza	masa	long.	tiempo
SI	N (Newton)	kg (kilogramos)	m	s
Cgs	din. (dina)	g (gramos)	cm (centímetros)	s
Inglés	Poundal.	lb (libra)	ft. (Pies).	s.

Un (Newton) es la fuerza que hay que aplicar a un (kilogramo) para que adquiere una aceleración de $1 \left(\frac{m}{s^2} \right)$.
 (Poundal) es la fuerza que hay que aplicar a un (libra) para que adquiere una aceleración de $1 \left(\frac{ft}{s^2} \right)$.

Sistema gravitacional o técnico. (fuerza, longitud, tiempo).

CANT. Sub. Fis. Sistemas	F	m	l	t
MKS (técnico)	Kgf.	Kg	m	s
Cgs (técnico)	grf.	gr	cm.	s
Británico (Ingeniero)	lbf	lb.	ft.	s.

Un Kgf es el peso de un Kg patrón en las condiciones en que adquiere una aceleración de $9.80665 m/s^2$, entonces

$$1 Kgf = 1 Kg (9.8 m/s^2) = 9.8 N.$$

$$1 grf = 980 din.$$

$$1 lbf = 32 Poundas.$$

Ahora debemos demostrar que $\frac{d\hat{T}}{dt}$ es la componente normal, es decir, que $\frac{d\hat{T}}{dt}$ es perpendicular a \hat{T} .

Solución: $\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{d\hat{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{T}}{ds} v \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{dt} v = \frac{d\hat{T}}{ds} v^2$ entonces.

$\frac{d\hat{T}}{ds} \perp \hat{T}$ se sabe que $\hat{T} \cdot \hat{T} = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(\hat{T} \cdot \hat{T}) = \frac{d}{ds}(1) = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{T} \perp \frac{d\hat{T}}{ds}}$
 \downarrow
 $= 2 \frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \hat{T} = 0$

Ahora definimos \hat{a} respecto a \hat{T} y \hat{N} .

$\hat{a} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{dT}{dt} \hat{v}$ donde $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} v$ y $\frac{dT}{ds} \perp \hat{T}$

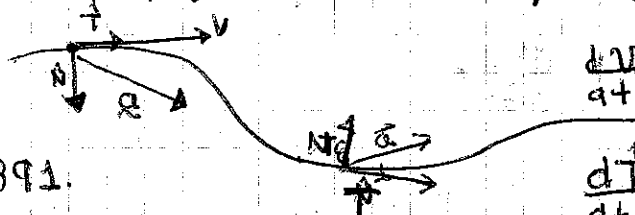
$\Rightarrow \hat{a} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{dT}{ds} v^2$ donde $\frac{dv}{dt} \hat{T}$ es tang y $\frac{dT}{ds} v^2$ va hacia la concavidad.

según lo último anotado $\frac{dT}{ds} = K \hat{N}$ donde K es un escalar. entonces

$K = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ que se llama curvatura y $\frac{1}{K} = \rho$ donde " ρ " es el radio de curvatura.

$\Rightarrow \hat{a} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{dT}{ds} v^2 = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N}$ donde $\frac{dv}{dt} \hat{T} = a_T$ y $\frac{v^2}{\rho} \hat{N} = a_n$.

Nota: si $a_T = 0 \Rightarrow v$ es constante y si $a_n = 0 \Rightarrow$ trayec. es rectilínea.



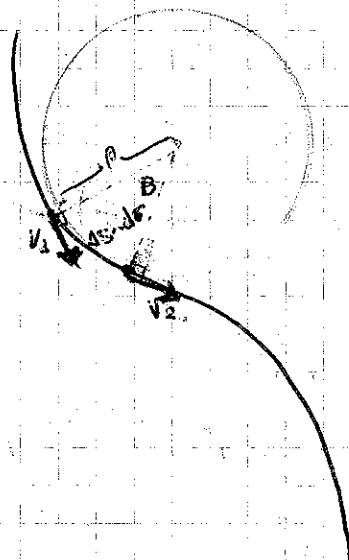
$\frac{dv}{dt} \hat{T}$ determina la rapidez de la partícula

$\frac{dT}{dt} v$ determina la dirección que tome la misma.

060891.

Radio de curvatura.

$\Delta s \approx |\Delta \mathbf{r}|$
 si $\Delta t \rightarrow 0$



La circunferencia es tangente a un punto de la trayectoria, se supone que Δt es muy pequeño.

Para hallar el ángulo baido B consideramos que B también es el ángulo de la circunferencia unitaria por tener lados mutuamente perpendiculares. (se parte de esa igualdad se tiene que

$B = \Delta s = \frac{|\frac{dT}{dt}|}{1} \Rightarrow \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho}$

circunf unitaria.

