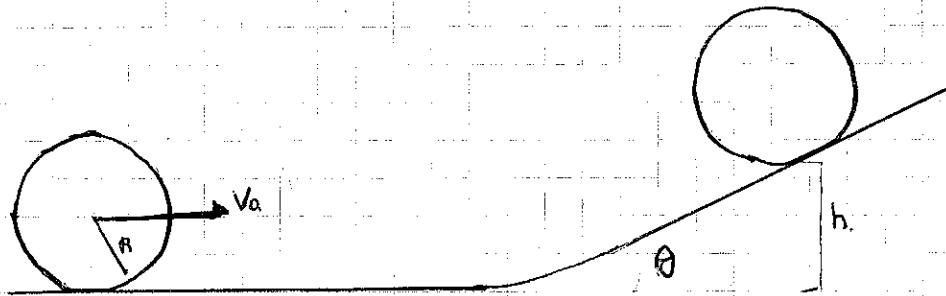


Ejemplo 19: Hallar la altura que alcanza la esfera



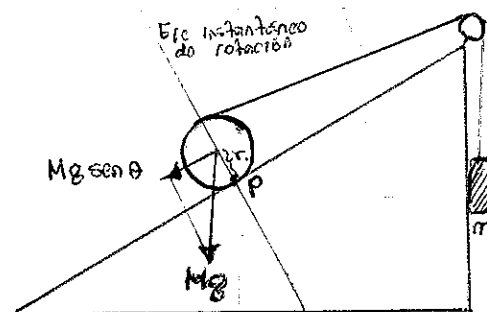
$$\text{de (89)} \quad K = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M V_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m r^2 \right) \frac{V_0^2}{r^2} + \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$= \frac{1}{5} m V_0^2 + \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{7}{10} m V_0^2 = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{7}{10} \frac{V_0^2}{g}$$

Ejemplo 17: Un cilindro macizo de masa M y de radio R tiene una cuerda enrollada. encuentre la tensión y la aceleración del cilindro, teniendo en cuenta que $I_c = \frac{1}{2}MR^2$. Suponga que el punto de contacto no desliza sobre la superficie.



Para este caso estudiamos el problema respecto al punto de contacto P y usando los teoremas 7 y 8.

Para m : $mg - T = ma$
 $T = mg - ma$ ②

para M : $T = I_P \alpha = 2rT - rMg \sin \theta$ ①

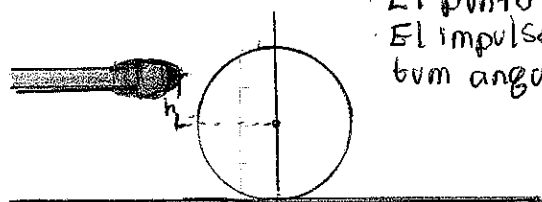
Por el T. 7 $I_P = (I_c + M\sigma^2) = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2) = \frac{3}{2}MR^2$ ②

$a = 2r\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2r}$ ③

①
 ② en ① $\rightarrow \frac{3}{4}Mr a = 2rmg - 2rma - rMg \sin \theta$
 ③

$\rightarrow a = \frac{m - M \sin \theta}{\frac{3}{2}M + 2m} g$

Ejemplo 18: A que altura se debe golpear la bola para que ruede sin deslizarse?



El punto de contacto no debe deslizarse.
 El impulso angular debe ser igual al cambio de momento angular respecto al eje instantáneo de rotación

$L - L_0 = \int_{t_0}^t \tau dt = I_m \omega$ $L_0 = 0$
 $L = I_0 \omega$

$L = \langle \tau \rangle \Delta t = I_0 \omega$

$L = \vec{p} \Delta t h = I_0 \omega$
 $L = \frac{h m v}{r \times 0} = I_0 \omega$ usando 1.

$h m v = \frac{2 m r^2 v}{5 r}$

$h = \frac{2}{5} r$

Para calcular el momento de inercia de la esfera:

$I_c = \iiint \delta R^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\phi$
 $R = \rho \sin \phi$
 $= \delta \iiint \rho^4 \sin^3 \phi d\rho d\phi d\phi$

$= \frac{8}{15} \delta \pi r^5$ donde $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta$
 entonces $I_c = \frac{2}{5} m r^2$ ①

Rotación y traslación de un cuerpo rígido.

Como antes, consideremos solo el movimiento en que la rotación se tome alrededor del eje z . Hallemos una expresión para L_z .

Teorema 9:

sea $(R \times MV)$ el momentum angular del centro de masas respecto a un sistema de referencia inercial e I_0 el momento de inercia respecto al centro de masas, entonces se tiene que:

$$L_z = I_0 \omega + (R \times MV)_z.$$

Demostración:

denotemos las coordenadas del centro de masas por "primas". entonces tenemos que

$$R = \sum \frac{m_i r_i}{M}$$

$$r_i = R + r'_i$$

$$\sum m_i r'_i = 0 \quad (\text{Teorema 1}).$$

$$\sum m_i \dot{r}'_i = 0 \quad (\text{Teorema 2}).$$

Entonces, de acuerdo a la definición del momentum angular.

$$L = \sum r_i \times m_i \dot{r}_i$$

$$= \sum (r'_i + R) \times m_i (\dot{r}'_i + V)$$

$$= \sum r'_i \times m_i \dot{r}'_i + \left(\sum m_i r'_i \right) \times V + R \times \left(\sum m_i \dot{r}'_i \right) + \sum R \times m_i V$$

$$\Rightarrow L = \sum r'_i \times m_i \dot{r}'_i + R \times MV.$$

Puesto que la rotación tiene como eje el eje z , tenemos que

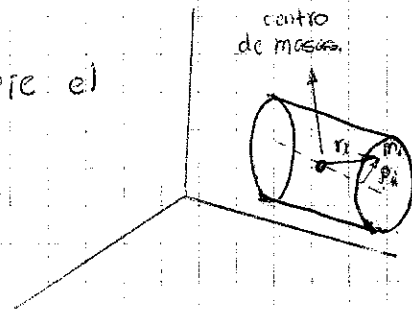
$$\left(\sum r'_i \times m_i \dot{r}'_i \right)_z$$

$$= \left(\sum p'_i \times m_i p'_i \right)_z$$

$$= \sum m_i p'^2_i \omega = I_0 \omega.$$

entonces.

$$L_z = I_0 \omega + (R \times MV)_z.$$



Teorema 10

Se τ_0 la componente del torque respecto al centro de masas sobre el eje z , entonces tenemos que:

$$\tau_0 = I_0 \alpha.$$

Demostración:

Tomando la componente z del teorema 4.

$$\tau_z = \tau_0 + (R \times F)_z \quad \tau_0 = \left(\sum_i r_i \times F_i \right)_z$$

Ahora derivamos el resultado del teorema 9.

$$\frac{dL_z}{dt} = I_0 \alpha + (R \times M a)_z$$

Puesto que $\tau_z = dL_z/dt$ tenemos que:

$$\tau_0 + (R \times F)_z = I_0 \alpha + (R \times M a)_z$$

Siendo $F = ma$ se tiene que:

$$\tau_0 = I_0 \alpha.$$

Resumen.

Rotación pura alrededor de un eje - sin rotación:

$$\begin{aligned} L &= I \omega \\ \tau &= I \alpha \\ K &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

Rotación y traslación (eje "0" referido al centro de masas.)

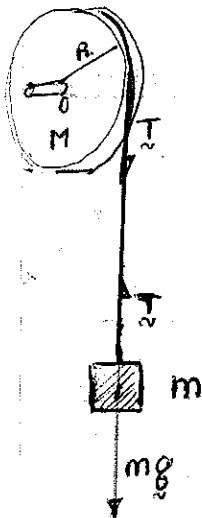
$$L_z = I_0 \omega + (R \times M V)_z$$

$$\tau_z = \tau_0 + (R \times F)_z$$

$$\tau_0 = I_0 \alpha$$

$$K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

Ejemplo 14: Hallar la aceleración del sistema



$$\textcircled{1} \quad mg - T = m\alpha \rightarrow T = m(g - \alpha)$$

$$\textcircled{2} \quad \tau_o = r \times T = I_o \alpha \quad I_o = \int_0^R \rho r^2 (2\pi r h dr) = \frac{1}{2} \rho \pi h R^4 \quad \text{donde } \rho (\pi R^2 h) = m$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{r \times T}{I_o} = \frac{2R m (g - \alpha)}{M R^2} \quad I = \frac{1}{2} M R^2 \quad \textcircled{3}$$

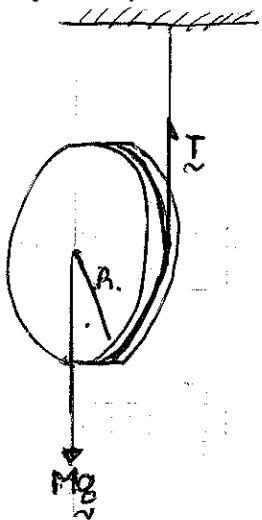
$$\textcircled{2} = \textcircled{3} \quad RT = \frac{1}{2} M R^2 \alpha \rightarrow T = \frac{1}{2} M R \alpha \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{ en } \textcircled{1} \quad mg - \frac{1}{2} M R \alpha = m\alpha = m R \alpha$$

$$\rightarrow mg = \left(m + \frac{1}{2} M\right) R \alpha$$

$$\alpha = \frac{mg}{\left(m + \frac{1}{2} M\right) R} \rightarrow a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2} M}$$

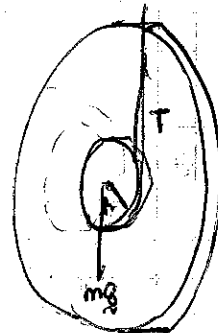
Ejemplo 15: Determine la aceleración angular del disco y la aceleración con que el disco cae.



$$\textcircled{1} \quad Mg - T = M R \alpha \quad T = \frac{1}{2} M R \alpha$$

$$\textcircled{2} \quad \tau = R T = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2g}{3R}$$

$$\textcircled{3} \quad I = \frac{1}{2} M R^2 \quad a = \frac{2g}{3}$$



Ejemplo 16: Dormir un yoyo:

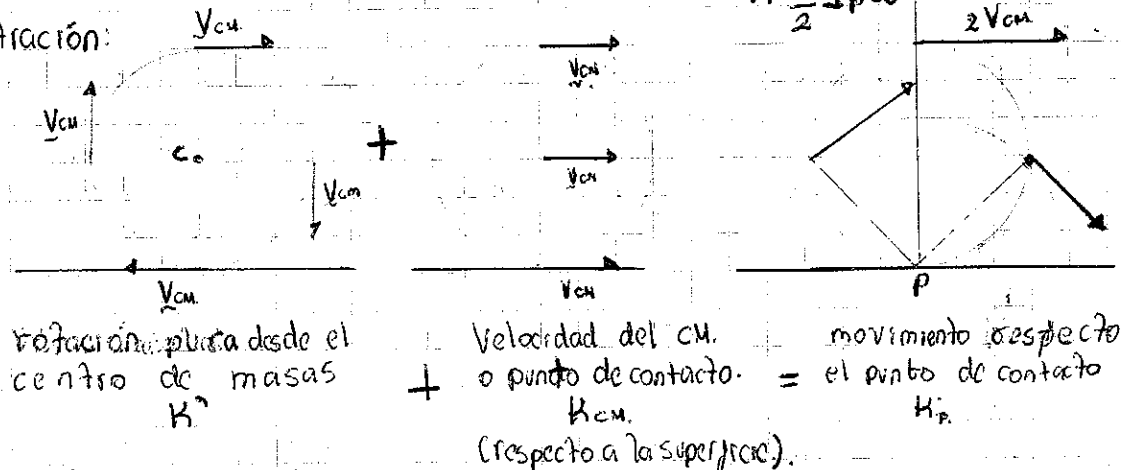
$$T - mg = 0$$

$$T R = I \alpha$$

$$\alpha = \frac{T R}{I} = \frac{m g R}{I}$$

Teorema 8: El movimiento de rodamiento es equivalente a una rotación alrededor de un eje instantáneo de rotación y la energía cinética se puede calcular sobre ejes instantáneos de rotación:

Demostración:



Partimos del teorema 7:

$$K_P = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{1}{2} (I_C + Mr^2) \omega^2$$

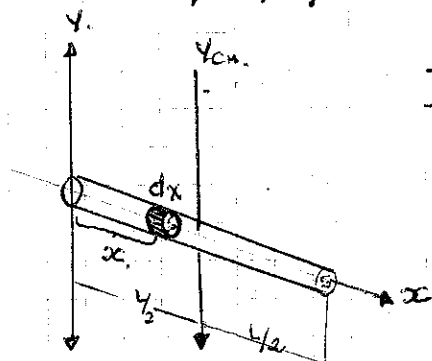
$$= \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M (r\omega)^2 ; (r\omega)^2 = v_{cm}^2$$

Entonces:

$$\underbrace{\frac{1}{2} I_C \omega^2}_{E_{cin. de rotación}} + \underbrace{\frac{1}{2} M v_{cm}^2}_{E_{cin. del CM}} = K_{total} = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

Ejercicios.

Ejemplo 13: Calcular el momento de inercia de una barra de longitud l y de densidad homogénea respecto al eje Y y al eje Y_C .



$$I_Y = \int x^2 dm = \int \rho x^2 (S dx) = \rho S \int_0^l x^2 dx$$

$$I_Y = \frac{\rho S l^3}{3}$$

$$I_{CM} = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} \rho S = \frac{\rho S}{3} \left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right]$$

$$I_{CM} = \frac{\rho S l^3}{12}$$

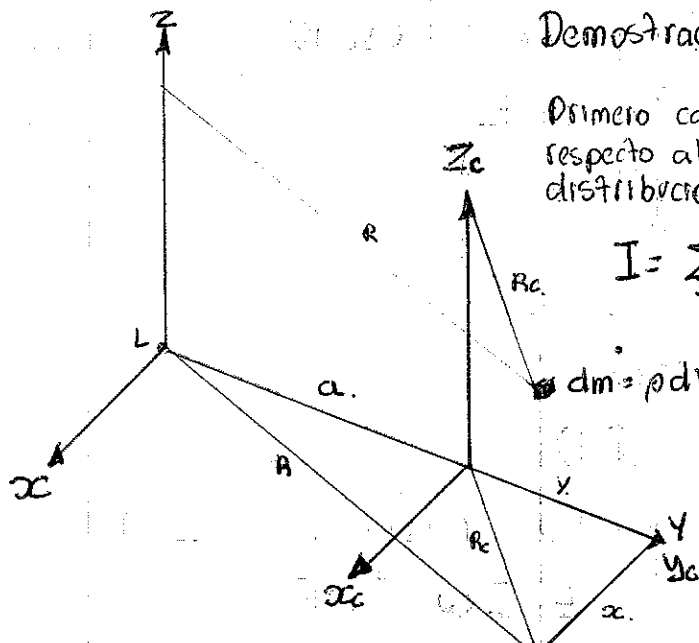
Usando el teorema 7: $I_{Y_C} = I_{CM} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2$

$$\rightarrow I_{CM} = I_Y - M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{\rho S l^3}{3} - \frac{\rho S l^3}{4} = \frac{\rho S l^3}{12}$$

Teorema 7: Teorema de los ejes paralelos de Steiner. $I = I_c + Ma^2$.

Demostración:

Primero calculamos el momento de inercia respecto al sistema-L, considerando una distribución continua de masa;



$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV.$$

$$= \int (x^2 + y^2) \rho dV.$$

$$x = x_c, \quad y = a + y_c.$$

$$= \int (x_c^2 + (a + y_c)^2) \rho dV.$$

$$= \int (x_c^2 + a^2 + 2ay_c + y_c^2) \rho dV.$$

$$I = \int (x_c^2 + y_c^2) \rho dV + 2a \int y_c dm + a^2 \int \rho dV.$$

El término del medio equivale $\sum y_i m_i y_{ci} = 0$, por el teorema 1.

entonces

$$I = I_c + Ma^2.$$

Con este teorema y el teorema 5 podemos escribir la ecuación (82) de la siguiente forma.

$$H = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (I_c + Ma^2) \omega^2 = K^r + K_{cm}.$$

$$H = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M (a\omega)^2 = K^r + \frac{1}{2} M V_{cm}^2 \quad (89).$$

El primer término se refiere a la energía cinética de rotación y el segundo se refiere a la energía cinética de traslación del cuerpo rígido.

Para hallar en particular, la componente de la ^{momento} ~~velocidad~~ angular sobre el eje de rotación, hacemos el producto punto:

$$(B49) \cdot \hat{R} \Rightarrow L_i \cdot \hat{R} = m_i r_i^2 (\omega \cdot \hat{R}) - m_i r_i \omega \cos \theta_i (r_i \cdot \hat{R})$$

$$= L_{iz} = m_i r_i^2 \omega - m_i r_i^2 \omega \cos^2 \theta_i$$

$$= m_i r_i^2 \omega (1 - \cos^2 \theta_i)$$

$$= m_i (r_i \sin \theta_i)^2 \omega$$

$$L_{iz} = m_i R_i^2 \omega \quad (B5a)$$

Entonces, $L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i R_i^2 \omega$

$$L_z = I \omega \quad (B5)$$

Para el caso de cuerpos simétricos respecto al eje de rotación, $L = L_z$, y por lo tanto,

$$L = I \omega \quad (B6)$$

Igualmente, para cuerpos simétricos el torque neto corresponde a

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \alpha I$$

Cálculo del momento de inercia en una distribución continua de masa.

$$I = \int R^2 dm = \iiint R^2 \rho dV$$

Trabajo y Potencia en un cuerpo rígido

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= F \cdot dr \cos \alpha$$

$$= F \cdot r d\theta \cos \alpha$$

$$= F \cdot r \cos \alpha d\theta$$

$$= T \cdot d\theta \quad T/r d\theta$$

$$= I \cdot d\omega$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{I d\omega}{dt} = \frac{F \cdot dr}{dt}$$

$$\text{si } r \text{ es constante}$$

$$P = T \frac{d\theta}{dt} = F \frac{dr}{dt}$$

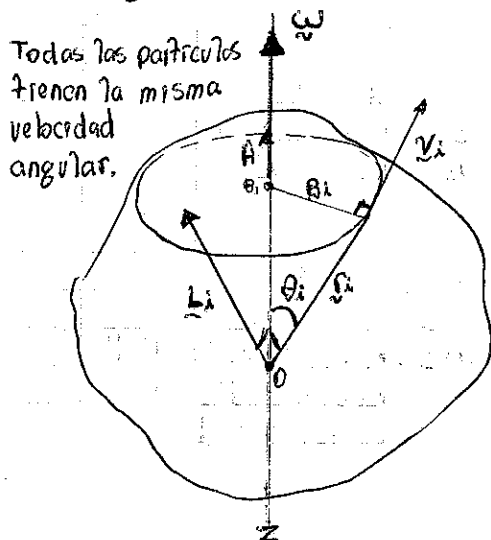
Entonces: $dW = F \cdot dx = T \cdot d\theta \quad (B7)$

$$P = F \cdot v = T \cdot \omega \quad (B8)$$

Cuerpo Rígido.

Un cuerpo rígido es un sistema en el cual la distancia entre todas sus partículas permanece constante. En esta sección estudiaremos los movimientos de rotación del cuerpo rígido, y los de traslación que, como ya sabemos, corresponde a la trayectoria seguida por el centro de masas del sistema, siguiendo las fórmulas generales encontradas para un sistema de partículas.

Momentum angular } de un cuerpo rígido:
y Energía cinética }



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

donde $v_i = |\omega \times r_i| = \omega r_i \sin \theta_i$
 $= \omega R_i$ (79)

entonces

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 \quad (80)$$

Definimos como momentos de inercia del sistema como sigue.

Primer momento de inercia respecto al eje específico: $\sum_i m_i R_i$ (81a)

Segundo momento de inercia (o simplemente momento) $I = \sum_i m_i R_i^2$ (81b).

En este caso R_i denota la distancia de la partícula respecto al eje de rotación.

Reemplazamos (81b) en (80) y obtenemos que la energía cinética total del cuerpo rígido está dada por la fórmula:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (82). \quad \text{(Energía cinética total referido al eje de rotación)}$$

Momentum angular de la partícula i :

$$L_i = r_i \times m_i v_i = m_i r_i \times (\omega \times r_i)$$

desarrollando el producto triple.

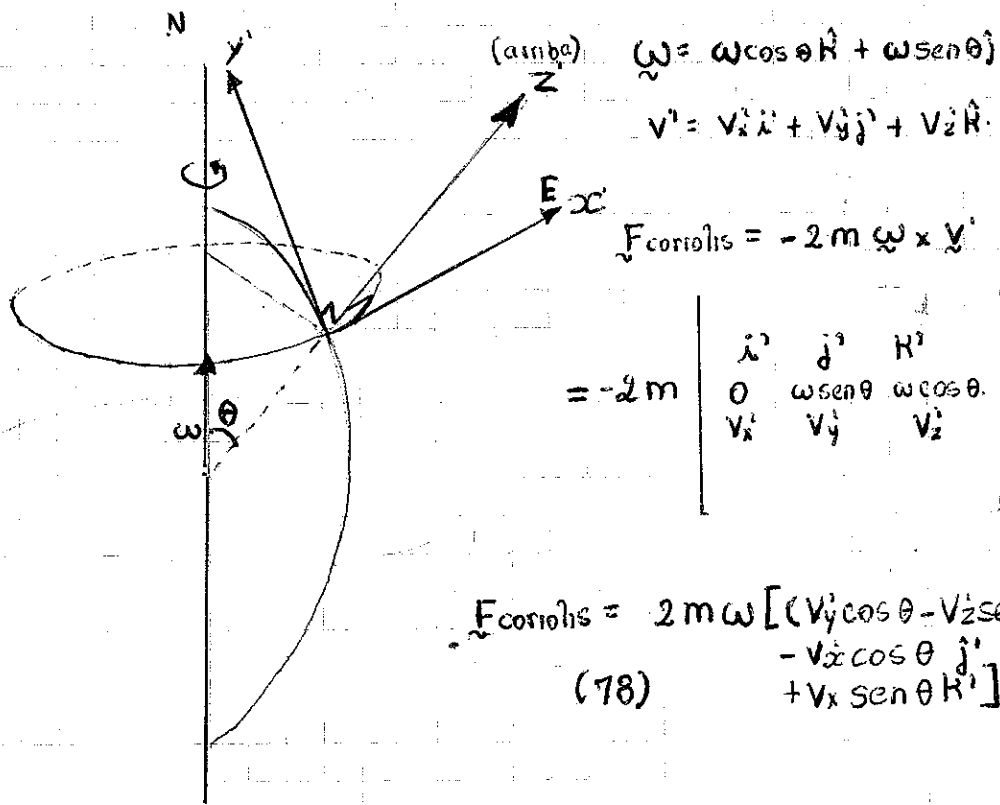
$$A \times (B \times C) = (A \cdot C) B - (A \cdot B) C \quad (83). \quad \text{entonces.}$$

$$L_i = m_i r_i^2 \omega - m_i (r_i \cdot \omega) r_i$$

$$L_i = m_i r_i^2 \omega - m_i r_i \omega \cos \theta_i r_i \quad (84)$$

Fuerza de Coriolis:

Esta fuerza ficticia aparece solo cuando el objeto se encuentra en movimiento respecto al observador no inercial.



Efecto de la fuerza de Coriolis en cuerpos en movimiento:

Hemisferio norte: $0 < \theta < \pi/2$.

MOVIMIENTO	VELOCIDAD	DEFLECCIÓN
Norte	$v_y > 0, v_x = v_z = 0$	este.
Sur	$v_y < 0, v_x = v_z = 0$	oeste.
Este	$v_x > 0, v_y = v_z = 0$	sur-arriba.
Oeste	$v_x < 0, v_y = v_z = 0$	norte-abajo.
Arriba.	$v_z > 0, v_x = v_y = 0$	oeste.
Abajo.	$v_z < 0, v_x = v_y = 0$	este.

Hemisferio Sur: $\pi/2 < \theta < \pi$ DEFLECCION EN EL ECUADOR ($\theta = \pi/2$).

DEFLECCIÓN	DEFLECCION EN EL ECUADOR ($\theta = \pi/2$).
oeste.	nula.
este.	nula.
norte-arriba.	arriba.
sur-abajo.	abajo.
oeste.	oeste.
este.	este.

$$= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$= \mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (75)$$

Consideramos:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}; \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \text{despejando } \mathbf{a}^2 \text{ y multiplicando por } m \text{ obtenemos que.}$$

$$m \mathbf{a}^2 = m \mathbf{a} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (76)$$

Fuerza para el observador no inercial

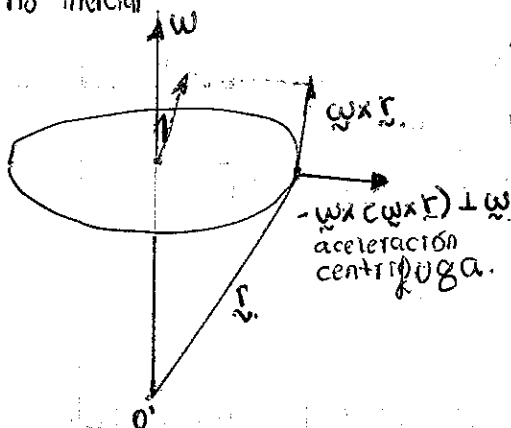
Fuerza para el observador inercial

Fuerza centrífuga

Fuerza de Coriolis

Fuerza acimutal

FUERZAS FICTICIAS.



• Fuerza centrífuga, perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$.

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{F}_{cp} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{F}_{cp}$$

• Fuerza acimutal, perpendicular a la posición.

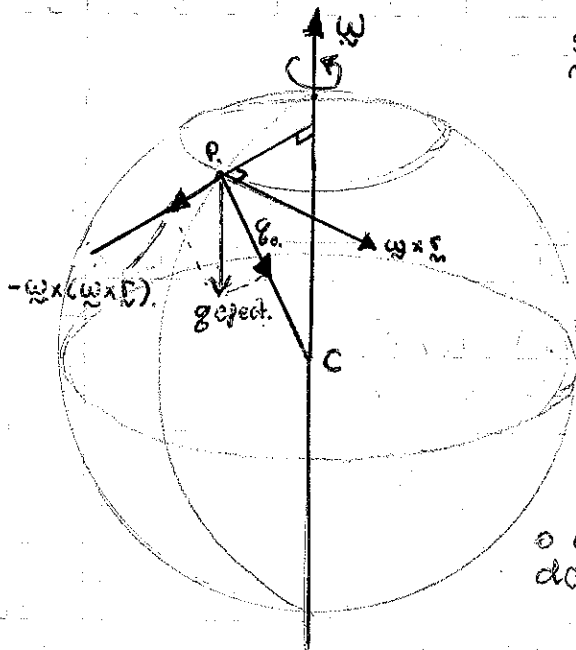
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}_{ac} = 0 \rightarrow \mathbf{r} \perp \mathbf{F}_{ac}$$

• Fuerza de Coriolis, perpendicular a la velocidad y a la velocidad angular.

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F}_{cor} = \mathbf{v} \times \mathbf{F}_{cor} = 0 \quad \boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{F}_{cor} \quad \mathbf{v} \perp \mathbf{F}_{cor}$$

Nota: si además el sistema no inercial de referencia está trasladándose aceleradamente respecto al sistema no inercial, entonces aparece la fuerza ficticia que conocemos: $-m \frac{d^2 \mathbf{r}_{00}}{dt^2}$

Movimiento relativo para la Tierra:



Sobre una partícula P situada sobre la Tierra, un observador inercial afirma que:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

Para el observador no inercial de la Tierra resulta que:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + m \underbrace{[\mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]}_{\mathbf{g}_{\text{efectiva}}} - \underbrace{2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}_{\mathbf{F}_{\text{Coriolis}}} \quad (77)$$

El Primer término siempre aparece, independientemente del estado de reposo o de movimiento del cuerpo y va en dirección de la plomada.

Entonces,

$$\underline{v} = \frac{d'\underline{r}}{dt} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}'$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad \text{don (72). obtenemos que:}$$

$$= \frac{d\underline{r}'}{dt} = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + x \frac{d\hat{i}'}{dt} + y \frac{d\hat{j}'}{dt} + z \frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Dicho de otra forma:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}}{dt} + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt} \quad (73)$$

$\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ son vectores de magnitud constante que giran con un movimiento circular uniforme respecto a O con velocidad angular $\underline{\omega}$, por lo tanto,

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{i}' \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{j}' \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{k}' \quad \text{entonces (73) equivale a}$$

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') \quad \text{por (72).}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} \quad (73)$$

Con este último resultado podemos definir un operador muy utilizado que se denomina operador derivada sustancial o derivada hidrodinámica:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \underline{\omega} \times \quad (74)$$

Para hallar la relación entre la velocidad respecto a O y a O' , aplicamos el operador sustancial a (73).

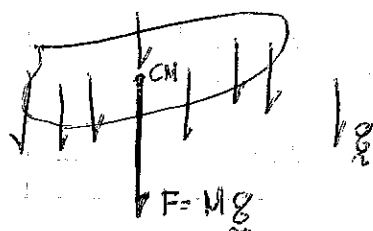
$$\underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} \right)$$

$$= \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \left(\frac{d'}{dt} + \underline{\omega} \times \right) \left(\frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} \right)$$

$$= \frac{d'}{dt} \left(\frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} \right) + \underline{\omega} \times \left(\frac{d'\underline{r}}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{r} \right)$$

Centro de gravedad.

Supongamos que tenemos un cuerpo cerca de la superficie de la tierra, la suma de sus fuerzas externas es entonces:



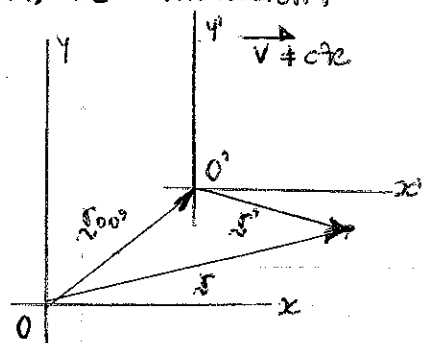
$$\underline{F} = \underline{F}_{ext} = \sum_i m_i \underline{g} = M \underline{g}$$

Se define el centro de gravedad del cuerpo como el punto en donde actúa la fuerza de gravedad. El centro de gravedad coincide con el centro de masas si el cuerpo está cerca de la superficie de la tierra.

La Tierra como sistema de Referencia no Inercial.

Sistemas de referencia no inerciales.

A) De Traslación;



$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{r}_{OO'}$$

$$\underline{v}' = \underline{v} - \underline{v}$$

$$\underline{a}' = \underline{a} - \frac{d\underline{v}}{dt}$$

$m \frac{d\underline{v}}{dt}$ es llamada fuerza ficticia, pues no proviene de interacciones.

$$\underline{F}' = \underline{F} - m \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (71)$$

B) De Rotación

O' rota respecto a O con velocidad angular designada " ω "

$$\underline{r} = \underline{r}'$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad (72)$$

Se pueden expresar x, y, z en función de x', y', z' :

$$x = \underline{r}' \cdot \hat{i} = x'\hat{i}' \cdot \hat{i} + y'\hat{j}' \cdot \hat{i} + z'\hat{k}' \cdot \hat{i}$$

$$y = \underline{r}' \cdot \hat{j} = x'\hat{i}' \cdot \hat{j} + y'\hat{j}' \cdot \hat{j} + z'\hat{k}' \cdot \hat{j}$$

$$z = \underline{r}' \cdot \hat{k} = x'\hat{i}' \cdot \hat{k} + y'\hat{j}' \cdot \hat{k} + z'\hat{k}' \cdot \hat{k}$$

En donde cada uno de los productos punto de los vectores unitarios representan los cosenos directores.

Vamos a denotar:

$\frac{d}{dt}$ la derivada con respecto al observador inercial

$\frac{d'}{dt}$ la derivada con respecto al observador no inercial.

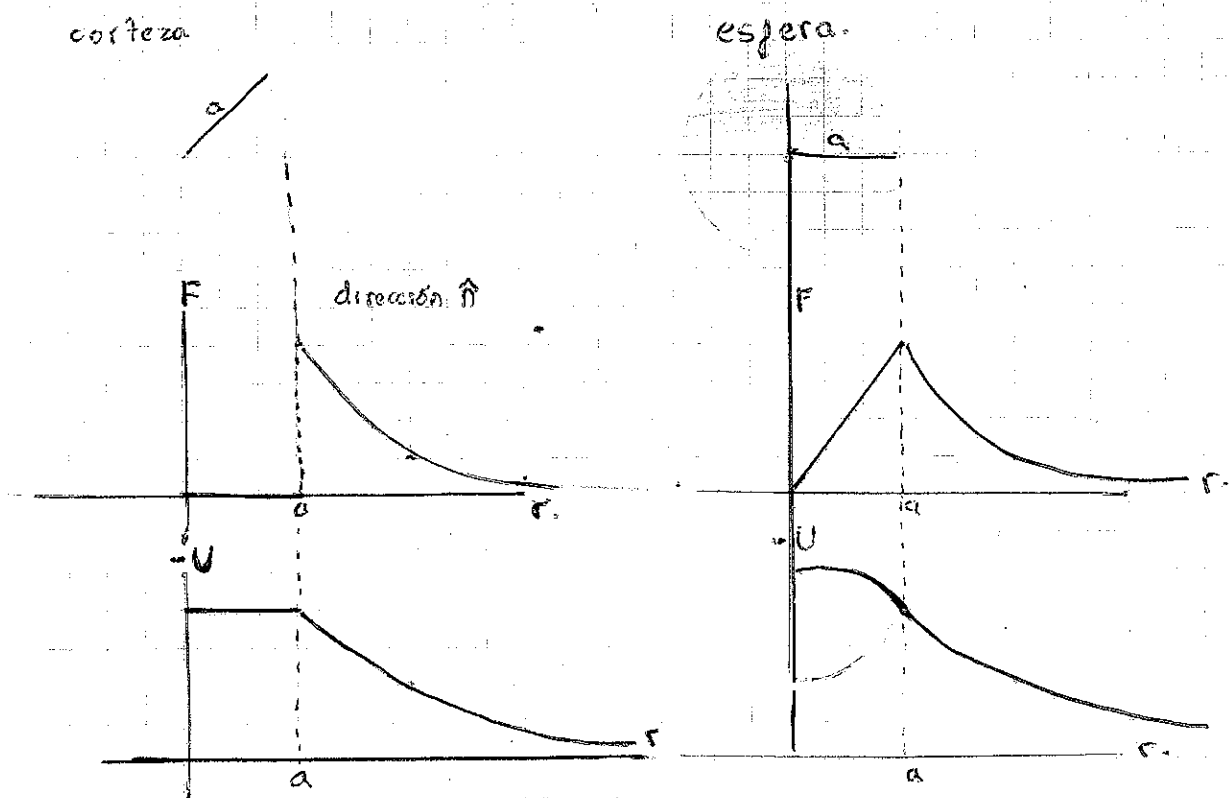
Podemos construir una esfera maciza de masa M_{esp} y radio a agrupando una serie de capas concéntricas. así:

$$F_{\text{esp}} = \sum F_c = \sum \frac{G M M_c}{r^2} \hat{r} = \left(\frac{G M}{r^2} \sum M_c \right) \hat{r} = \frac{G M M_{\text{esp}}}{r^2} \hat{r}$$

Entonces decimos que la esfera actúa sobre los puntos exteriores como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.

Asimismo, podemos decir que dos esferas uniformes de masas M_1 y M_2 se atraen con una fuerza igual a sus masas puntuales.

Gráficas de F, U en función de la distancia.



Ejemplo: 12. Fuerza gravitacional en dos esferas concéntricas huecas.

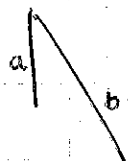
$$F = F_1 + F_2$$

$$F = F_1$$

$$F_1 = -\frac{m M_a}{r^2} U \hat{r} \quad -U_1 = \hat{r}$$

$$F = 0$$

$$F_2 = -\frac{m M_b}{r^2} U \hat{r}$$



Area del anillo: $dA = 2\pi(a \sin\theta) a d\theta$
 $= 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$

masa del anillo $dm = \lambda dA$

Por simetría, sabemos que, la fuerza resultante debe ir en dirección \hat{n} .

$$dF = \frac{2\pi G M a^2 \sin\theta d\theta \cos\phi}{r^2} \hat{n} \quad (67a)$$

en donde $\cos\phi = \frac{ME}{S} = \frac{r - a \cos\theta}{S}$ (67b)

entonces, de (67b) en (67a) obtenemos

$$dF = \frac{2\pi G M a^2 \sin\theta (r - a \cos\theta)}{S^3} \hat{n} \quad (68)$$

donde S se puede escribir en terminos de r y θ .

$$S^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta. \quad (68a)$$

La Fuerza total entre el cascarón y la masa la obtenemos integrando:

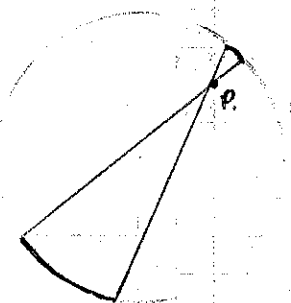
$$F = 2\pi G M a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta (r - a \cos\theta) d\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos\theta)^{3/2}} \hat{n} \quad (69)$$

Si $r > a$, la solución de esta integral corresponde a

$$F = \frac{(4\pi a^2 \delta) M}{r^2} \hat{n} \quad \text{en donde } (4\pi a^2 \delta) \text{ es la masa del cascarón } (M_c)$$

Es facil ver que si $r = a$ entonces $F = 0$.

Al considerar una masa dentro del cascarón hay una proporción entre la distancia y la fuerza gravitacional que hace que las fuerzas se anulen.



$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{G M_c M}{r^2} \hat{n} & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r \leq a \end{array} \right. \quad (70)$$

Hemos demostrado que la corteza esférica actúa sobre puntos exteriores como si toda su masa estuviese concentrada en su centro.

$$(63) \text{ en } (62) \rightarrow dF = \frac{GM\lambda dx}{(b^2+x^2)^{3/2}} (x\hat{i} + b\hat{j}) \quad (64).$$

Integramos,

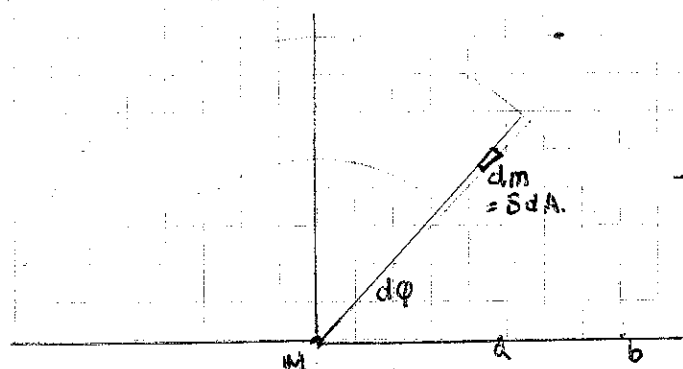
$$F = \int dF = \lambda GM \underbrace{\int_{-a}^a \frac{x dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}}_{\substack{\text{función impar} \\ \text{la integral es cero}}} - \underbrace{j GM \lambda b \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}}_{\text{función par.}}$$

$$F = -j GM \lambda b 2 \int_0^a \frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = -\frac{2GM\lambda a}{b\sqrt{a^2+b^2}} \hat{j}$$

como $2\lambda a = m$
masa de la barra.

$$= -\frac{GMm}{b\sqrt{a^2+b^2}} \hat{j} \quad (65)$$

Supongamos ahora que el cuerpo de masa M es sometido a la acción de una fuerza gravitacional de una lámina de densidad uniforme δ como se observa en la figura.

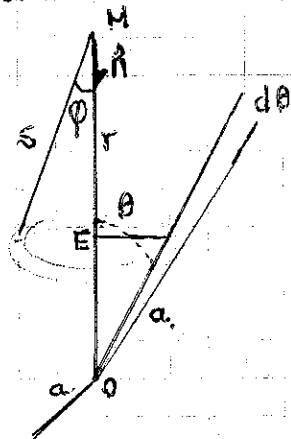


$$dF = \frac{GM\delta r dr d\phi}{r^2} (\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j}).$$

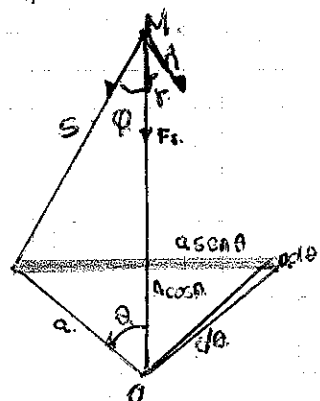
$$\rightarrow F = GM\delta \int_0^\pi \int_a^b \frac{(\cos\phi \hat{i} + \sin\phi \hat{j})}{r} dr d\phi$$

$$= 2G\delta M \ln \frac{b}{a} \hat{j} \quad (66)$$

Ahora consideremos el caso de una masa puntual sobre la cual actúa la fuerza gravitacional de una corteza esférica. Para ello, dividimos la corteza en anillos; como se muestra en la figura:



sección transversal.



La ecuación se puede escribir en términos de la excentricidad y la directriz de una cónica, para obtener la ecuación general de esta en coordenadas polares, la cual uno de los focos coincide con el polo.

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)} \quad (60) \quad \text{donde } ed = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{y} \quad e = \frac{L^2 D}{GMm^2}$$

La clase de cónica depende de la excentricidad:

$e = 0$	circunferencia.	} trayectoria cerrada	PLANETAS	energía total Positiva.
$0 < e < 1$	elipse.			
$e = 1$	Parábola	} trayectoria abierta		energía total negativo.
$1 < e$	hipérbola.			

Estos resultados guardan estrecha relación con la primera ley de Kepler.

Para llegar a la primera ley de Kepler, usamos la definición de periodo: $T = 2\pi\omega^{-1}$.

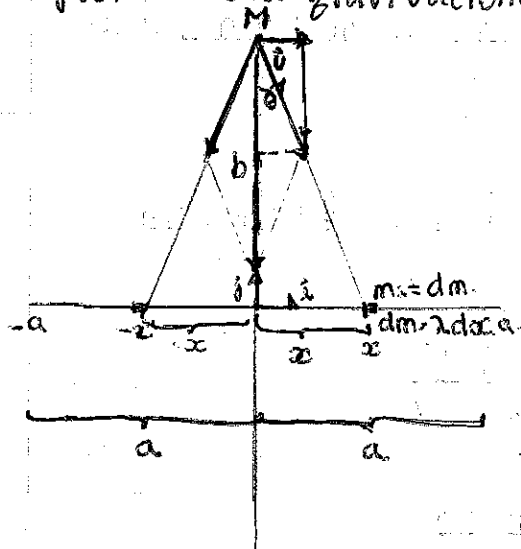
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} \quad (61)$$

Como $\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$ y (61) nos queda:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \rightarrow T^2 \propto r^3$$

Fuerza Gravitacional entre masas no puntuales

Consideremos una masa puntual M sobre la cual actúa un cuerpo con distribución lineal de masa. Se busca encontrar la fuerza neta gravitacional sobre M .



$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \text{cte.}$$

$$dF = \frac{GMm_i}{b^2 + x^2} \quad (62)$$

$$\hat{u} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{i} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \hat{j}$$

$$\vec{U} = \sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}$$

$$\vec{U} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} \hat{i} - \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} \hat{j} \quad (63)$$

Para buscar la ecuación de la trayectoria para este caso en particular, vamos a usar un método al estilo del ejemplo 9 en 2).

Para el caso de la interacción gravitacional, la ecuación (47) corresponde a:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (54)$$

Como nuestro objetivo es encontrar la ecuación de la trayectoria, hacemos un cambio de variable cuyo objetivo es eliminar la variable del tiempo.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \stackrel{(51c)}{=} \frac{dr}{d\phi} \frac{L}{mr^2} \quad (55)$$

Defino la variable $q = 1/r$ para escribir la ecuación anterior de la forma:

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{q} \right) \frac{L^2 q^2}{m} = - \frac{L}{m} \frac{dq}{d\phi} \quad (56)$$

Reemplazamos q y (56) en (54) y obtenemos que

$$E = \frac{1}{2} \frac{m L^2}{m^2} \left(\frac{dq}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2 q^2}{2m} - GMm q \quad (57)$$

$$\frac{d}{d\phi} (57) \Rightarrow 0 = \frac{L^2}{m} \left(\frac{dq}{d\phi} \right) \frac{d^2 q}{d\phi^2} + \frac{L^2}{m} q \frac{dq}{d\phi} - GMm \frac{dq}{d\phi}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{L^2}{m} \frac{d^2 q}{d\phi^2} + \frac{L^2}{m} q - GMm$$

Obtenemos así una ecuación diferencial no homogénea:

$$\frac{d^2 q}{d\phi^2} + q = \frac{GMm^2}{L^2} \quad (58)$$

La solución de la ecuación está dada por $q = q_h + q_p$

$$\begin{aligned} q &= D \cos(\phi - \phi_0) + \frac{GMm^2}{L^2} \\ &= \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} \left(\frac{D}{GMm^2} \cos(\phi - \phi_0) + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r = \frac{L^2 / GMm^2}{\frac{DL^2}{GMm^2} \cos(\phi - \phi_0) + 1} \quad (59)$$

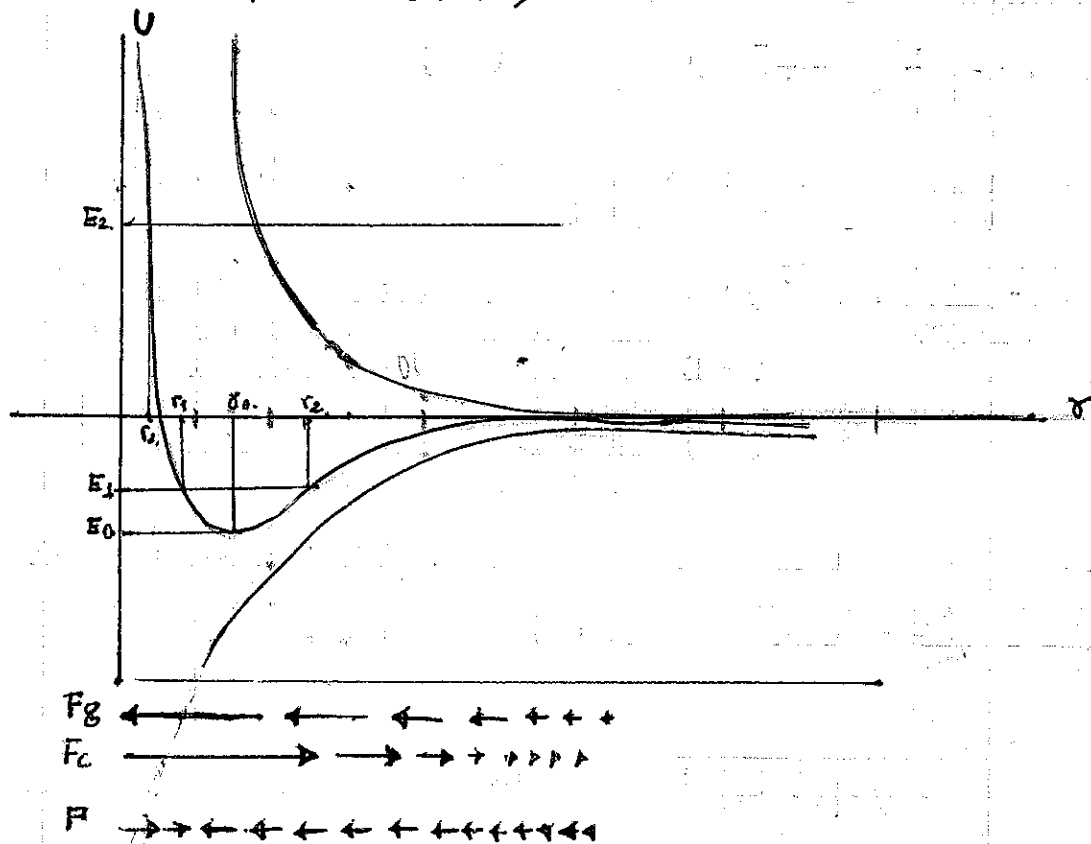
$$\phi(r) = \phi_0 + \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{eff}}(r)]}} \cdot \frac{L}{mr^2} \quad (53)$$

Ecuación de la trayectoria en coordenadas polares)

Curvas de energía potencial en función del radio.

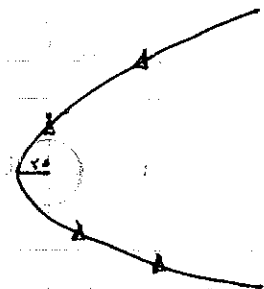
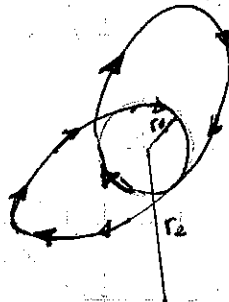
$$U_{\text{eff}} = \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$F = \left(-\frac{GMm}{r^2} + \frac{L^2}{2mr^3} \right) U_r$$



Trayectoria para E_0 Trayectoria para E_1

Trayectoria para E_2



Entonces la energía total de la partícula escrito en coordenadas polares está dada por:

$$(46) \text{ en } (43) \rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{L^2}{mr^2} \right) + U(r).$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (47)$$

Definimos como energía potencial interna como una función de la posición a la que se le puede asociar una fuerza:

$$U_{\text{efec.}} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \quad (48)$$

Buscamos la fuerza asociada a cada uno de los términos de la derecha usando la fórmula del gradiente de la ecuación (38).

$$F_c = \nabla \cdot \left(-\frac{L^2}{2mr^3} \right) = -\frac{L^2}{mr^3} \quad \text{como es una fuerza que siempre va hacia afuera, la denominamos Fuerza centrífuga (NO es ficticia).} \quad (49)$$

$$F = -\nabla U(r) = -\frac{dU}{dr} \quad \text{que bien puede ser positiva o negativa. En el caso de la fuerza gravitacional, es negativa.} \quad (50)$$

Para hallar la ecuación de la velocidad despejamos dr/dt en (47)

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{efec.}}]} \quad (51a) \quad \text{entonces,}$$

$$t = t_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{ef.}}]}} \quad (51b)$$

La ecuación del momentum angular como relación a la velocidad angular está dada por:

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \quad (51c)$$

$$\rightarrow \phi = \phi_0 + \int_0^t \frac{L dt}{mr^2} \quad (51d)$$

Para obtener la ecuación del movimiento en coordenadas polares;

$$\frac{(51a)}{(51c)} \Rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_{\text{ef.}}]}}{L/mr^2} \quad (52) \quad \text{entonces,}$$

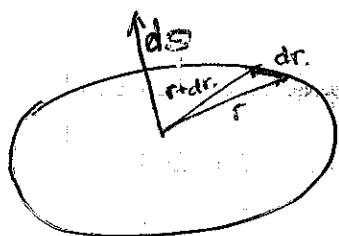
Reemplazamos (39b) en 40 y obtenemos que

$$\tau_o = \frac{dL}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \phi} \quad (41).$$

Deducimos que siempre que la energía potencial depende del ángulo, existe un torque y el momentum angular no se conserva.

Ahora, si la energía potencial no depende del ángulo, sino solo de la distancia, en (39b) $F_\phi = 0$ y la fuerza, por lo tanto es central. Asimismo, podemos decir que para las fuerzas centrales el momentum angular permanece constante, lo cual implica que:

1. El movimiento se da en un plano
2. El área barrida por unidad de tiempo es constante.



dS es el vector área dado por:

$$dS = \frac{1}{2} r \times dr \rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} r \times p = \frac{1}{2m} L = \text{cte.} \quad (42).$$

El segundo punto corresponde a la segunda ley de Kepler.

Movimiento de una partícula bajo acción de fuerzas centrales:

La energía total para una partícula está dada por:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r) \quad (43) \text{ (Fuerzas conservativas).}$$

$$\text{de (38)} \rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \quad (44)$$

$$\rightarrow L = m r v r \times \left(\frac{dr}{dt} U_r + r \frac{d\phi}{dt} U_\phi \right).$$

$$L = m r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{k} \quad (45).$$

$$\text{de (38)} \rightarrow L^2 = m^2 r^4 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \rightarrow r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2} \quad (45a).$$

Reemplazamos este último término en (34) y obtenemos que:

$$\text{(39) en (34)} \rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} = v_r^2 + v_\phi^2 \quad (46)$$

45a en (44) \rightarrow

El diferencial dU lo podemos escribir así:

$$dU(x, y, z) = \nabla U \cdot d\mathbf{r} \quad \text{en coordenadas cartesianas}$$

$$dU(r, \varphi, z) = \nabla U \cdot d\mathbf{r} \quad \text{en coordenadas polares}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla U \cdot (dr \hat{U}_r + r d\varphi \hat{U}_\varphi + dz \hat{K})$$

El vector ∇U tiene tres componentes, que las denotamos:

$$\nabla U = \mathbf{A} = A_r \hat{U}_r + A_\varphi \hat{U}_\varphi + A_z \hat{U}_z$$

Obtenemos con esta notación que

$$\frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} dz = A_r dr + A_\varphi r d\varphi + A_z dz$$

A Partir de esta ecuación, obtenemos tres ecuaciones, a saber:

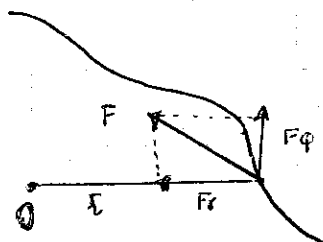
$$A_r dr = \frac{\partial U}{\partial r} dr ; \quad A_\varphi r d\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi ; \quad A_z dz = \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Despejando las componentes de ∇U , obtenemos que

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{U}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{U}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \hat{K} \quad (38)$$

Considerando el caso de coordenadas polares una fuerza se puede descomponer en sus componentes sobre \hat{U}_r y \hat{U}_φ

Si la fuerza es conservativa, entonces existe una energía potencial asociada a la fuerza



$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{U}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \hat{U}_\varphi = F_r \hat{U}_r + F_\varphi \hat{U}_\varphi \quad (39)$$

Igualmente, podemos obtener dos ecuaciones de (39).

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad (39a) ; \quad F_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (39b)$$

El torque para dicha fuerza conservativa será igual a:

$$T_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{U}_r & \hat{U}_\varphi & \hat{K} \\ r & 0 & 0 \\ F_r & F_\varphi & 0 \end{vmatrix} = r F_\varphi \hat{K} = \frac{dL}{dt} \quad (40)$$

respecto a O

Gravitación

Leyes de Kepler:

1. "Los planetas describen órbitas elípticas, con el sol en uno de los focos".
2. "El vector posición de un planeta relativo al sol, barre áreas iguales en tiempos iguales".
3. "El cuadrado del periodo de revolución es proporcional al cubo de la distancia".

Vamos a partir de la definición de fuerzas centrales para llegar al análisis de la interacción gravitacional y así poder comprender los movimientos planetarios, y en general, cuerpos en donde actúen dichas fuerzas.

Recordamos que todas las fuerzas centrales son conservativas, entonces:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{r} = -\nabla U. \quad (F(r)\hat{r} \text{ es la descripción de la fuerza en coordenadas polares}).$$

$L = \text{cte} \Rightarrow \vec{L} = 0.$

Por ser el momento angular constante, el movimiento se da en un plano.

Para continuar con el estudio de las fuerzas centrales en coordenadas polares, vamos a definir el operador "nabla" en dichas coordenadas.

En coordenadas cartesianas, el operador nabla se denota así:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i \quad (35)$$

El término de la derecha corresponde a una notación especial en donde $\hat{e}_1 = \hat{i}$, $\hat{e}_2 = \hat{j}$, $\hat{e}_3 = \hat{k}$.

La velocidad en coordenadas polares corresponde a:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} \quad (36)$$

entonces:

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} \quad (36a)$$

En coordenadas cilíndricas (2a), queda

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k} \quad (37)$$

Ejemplo 11: Una nave espacial está en reposo, encendemos los cohetes y durante 100 segundos se expulsan gases a la razón de 150 kg/s con v respecto al cohete de 3000 m/s . La masa inicial de la nave con el combustible es de 25.000 kg . ¿Cuál es el empuje? ¿Cuál es la aceleración que adquiere el cohete? ¿Cuál es la velocidad final que adquiere el cohete?

Sea M_0 la masa inicial del cohete: 25.000 kg .

M : la masa cohete-combustible en cualquier instante de tiempo

$F=0$ (No hay fuerzas relevantes sobre el cohete).

v_{rel} : Velocidad de los gases respecto al cohete: 3000 m/s

Entonces la ecuación (34) nos quedaría así:

$$0 = M \frac{dv}{dt} - \frac{dM}{dt} v_{\text{rel}}$$

$$\rightarrow M dv = dM v_{\text{rel}} \rightarrow \int_{v_0=0}^v \frac{dv}{v_{\text{rel}}} = \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

$$\frac{v}{v_{\text{rel}}} = \ln \left(\frac{M}{M_0} \right) \Rightarrow v = v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M}{M_0} \right)$$

$$M(t) = M_0 - \frac{dm}{dt} t \Rightarrow M(100) = 10^4 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow v = -2748,9 \text{ m/s}$$

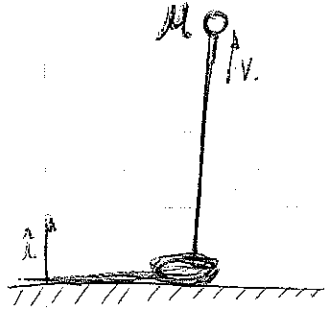
$$\text{Empuje} = v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} = 4,5 \times 10^5 \text{ N}$$

Localización del Centro de masa en una distribución continua de masa

$$CM = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} \quad \text{sea } \rho(r) = \frac{dm}{dV} \rightarrow r_{CM} = \frac{\int r \rho dV}{\int \rho dV}$$

Ejemplo 10:

Un cuerpo de masa M está atado al extremo de una cadena muy larga de densidad lineal constante. El cuerpo es lanzado hacia arriba con una velocidad V_0 . Encontrar la altura máxima a la cual sube la piedra.



Consideramos el sistema formado por la piedra y la cuerda que está en el aire como un sistema de masa variable dentro de un gran sistema, piedra-cuerda de masa constante, por lo cual consideramos la ecuación (34).

$$F = M \frac{dV}{dt} + (V-u) \frac{dM}{dt} \quad (34).$$

Para este caso, multiplicamos por dt :

$$(M + \lambda x)(-g)dt = (M + \lambda x)dV + (V-u)d(M + \lambda x) \quad u=0$$

$$= -(M + \lambda x)gdt = (M + \lambda x)dV + V\lambda dx. \quad (1)$$

Para poder integrar, tenemos que eliminar el dt , para ello multiplicamos

$$(1) \times (M + \lambda x)V$$

$$= -(M + \lambda x)^2 g dx = (M + \lambda x)^2 V dV + (M + \lambda x) \lambda V^2 dx$$

la parte derecha de la igualdad es una diferencial exacta, entonces

$$= -(M + \lambda x)^2 g dx = d \left[\frac{1}{2} (M + \lambda x)^2 V^2 \right]$$

Ahora si podemos integrar la ecuación:

$$-\int_0^x (M + \lambda x)^2 g dx = \int_{\frac{1}{2} M^2 V_0^2}^{\frac{1}{2} (M + \lambda x)^2 V^2} d \left[\frac{1}{2} (M + \lambda x)^2 V^2 \right]$$

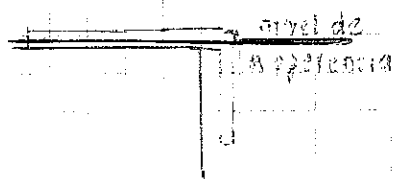
$$= \frac{g}{3\lambda} [M^3 - (M + \lambda x)^3] = \frac{1}{2} (M + \lambda x)^2 V^2 - \frac{1}{2} M^2 V_0^2$$

Una vez encontrada la relación entre la posición y la velocidad, podemos hallar la altura máxima que sube la piedra

$$x = x_{\max} \rightarrow V = 0$$

$$\frac{g}{3\lambda} [M^3 - (M + \lambda x_{\max})^3] = -\frac{1}{2} M^2 V_0^2 \rightarrow x_{\max} = \frac{M}{\lambda} \left[\left(\frac{1 + 3\lambda V_0^2}{2gM} \right)^{1/3} - 1 \right]$$

Consideremos el caso de que no actúen fuerzas de fricción, entonces podemos decir que la energía se conserva.



$$U = m_{\text{rod}} g h \quad m_{\text{rod}} = \lambda S$$

$$U = -\frac{\lambda S^2 g}{2}$$

$$h = \frac{S}{2}$$

$$E_{\text{total}} = K_{\text{rod}} + U_{\text{spring}} = \frac{1}{2} \lambda l \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda g S^2 = \text{cte.}$$

$$\text{Derivamos y obtenemos que } \frac{1}{2} \lambda l 2 \left(\frac{dS}{dt} \right) \frac{d^2 S}{dt^2} - \frac{1}{2} \lambda g 2 S \left(\frac{dS}{dt} \right) = 0$$

$$\text{Simplificando, } \ddot{S} - \frac{g}{l} S = 0$$

Ahora consideremos el mismo caso pero con una fuerza de fricción tipo Coulomb en la superficie de contacto cadena-mesa.

$$F = m \ddot{s} \quad \lambda s g - \mu(1-\lambda)\lambda g = \lambda \ddot{s}$$

$$g s - \mu \lambda g + \mu g s = \ddot{s}$$

$$\ddot{s} - \frac{(1+\mu)}{\lambda} g s = -\mu g \quad (8)$$

$$s_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{-r_1 t} \quad r = \sqrt{\frac{(1+\mu)g}{\lambda}}$$

$$s_p = \frac{\mu \lambda}{(1+\mu)}$$

$$s = s_h + s_p = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{-r_1 t} + \frac{\mu \lambda}{(1+\mu)}$$

Ajuste de constantes

en $t=0$ $s = l_0$ $\dot{s} = 0$ $l_0 = C_1 + C_2 + \frac{\mu \lambda}{(1+\mu)} \rightarrow C = \frac{l_0(1+\mu) - \mu \lambda}{2(1+\mu)}$
 a) $C_1 = C_2 = C$

$$s = \frac{l_0(1+\mu) - \mu \lambda}{(1+\mu)} \cosh\left(\sqrt{\frac{(1+\mu)g}{\lambda}} t\right) + \frac{\mu \lambda}{(1+\mu)} \quad (9)$$

b)

tiempo que tarda la cadena en abandonar la mesa: $s = l$

$$t_A = \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\mu)g}} \cosh^{-1}\left(\frac{l}{l_0(1+\mu) - \mu \lambda}\right) \quad (10)$$

Usando la identidad

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (11) \text{ nos queda}$$

$$t_A = \sqrt{\frac{\lambda}{(1+\mu)g}} \ln \left\{ \frac{l + \sqrt{l^2 - [l_0(1+\mu) - \mu \lambda]^2}}{l_0(1+\mu) - \mu \lambda} \right\}$$

2) Solución de la ecuación del movimiento usando el teorema del trabajo y la energía.

Todos los puntos de la cadena tienen la misma velocidad, entonces

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \lambda l \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad (12)$$

$\frac{dM}{dt} > 0$ si el sistema gana masa

$\frac{dM}{dt} < 0$ si el sistema pierde masa.

Ejemplo 9:

Una cadena reposa del borde de una mesa sujeta de un extremo A mientras que el otro extremo se encuentra a una distancia l_0 de la mesa. encontrar:

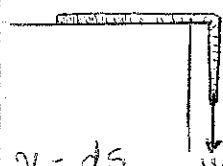
a) $s(t)$ b) tiempo que tarda la cadena para abandonar la mesa. c) Velocidad que adquiere al abandonar la mesa. Suponga que la cadena tiene una densidad lineal constante λ

1) Solución dinámica considerando la cadena como una sola partícula.

$m = l\lambda$, l : longitud de la cadena.

$$s(0) = l_0.$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = 0.$$



Fuerzas que actúan y ecuación del movimiento en cualquier instante de tiempo.

$$F = m \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad w = \lambda s g.$$

$$\lambda s g = l \lambda \ddot{s} \rightarrow \ddot{s} + \frac{g}{l} s = 0. \quad (1)$$

Ecuación característica: $r^2 - \frac{g}{l} = 0$, $r = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$

Solución de la ecuación: $s(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (2)$

$$\frac{ds}{dt} = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \quad (3)$$

Ajuste de constantes.

en $t=0$, $s=l_0 \rightarrow (1) \quad l_0 = C_1 + C_2 \quad (4)$

en $t=0$, $v=0 \rightarrow (3) \quad 0 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \quad (5)$

$$r_1 = -r_2 \rightarrow C_1 = C_2 = l_0/2.$$

a) $s(t) = \frac{l_0}{2} (e^{r_1 t} + e^{-r_1 t}) = l_0 \cosh \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (6)$

b)

tiempo que tarda la cadena para abandonar la mesa

$$s=l \rightarrow t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cosh^{-1} \frac{l}{l_0} \quad (7)$$

Sistemas con masa variable:

En muchos problemas físicos encontramos sistemas abiertos, en donde las partículas pueden entrar o salir, tal es el caso de un cohete que viaja expulsando gases o una gota de agua que cae absorbiendo polvo.

Hay varias formas de tratar estos problemas, considerar el cohete-gas como un solo sistema o estudiarlos como dos sistemas por separado en el cual uno gana las partículas que otro pierde:

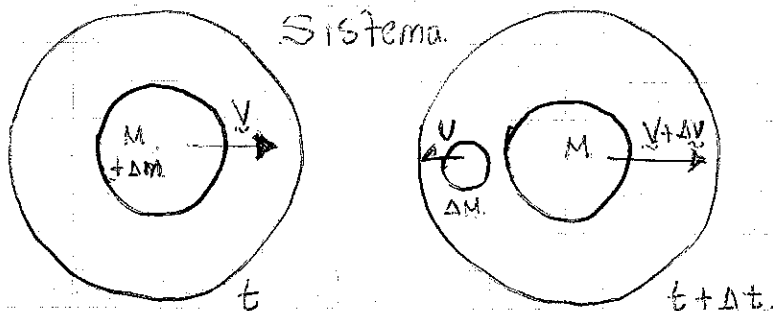
El caso del cohete lo podemos resolver de la siguiente forma. Sea F las fuerzas externas que actúan sobre el cohete y F_R la fuerza de interacción con los gases, entonces, la ecuación del movimiento del cohete está dada por:

$$F + F_R = \frac{dP}{dt} = \frac{d(MV)}{dt}$$

$$F + F_R = \frac{dM}{dt}V + M \frac{dV}{dt} \quad (33)$$

La otra forma es considerando el sistema cohete-gases como un solo sistema con masa y número de partículas constante.

Supongamos que en un instante de tiempo t la masa del cohete es $M + \Delta M$ y en un instante posterior $t + \Delta t$ ΔM se desprende de la masa del cohete.



$$① P(t) = (M + \Delta M)V$$

$$② P(t + \Delta t) = M(V + \Delta V) + \Delta M U$$

$$② - ① \quad \Delta P = M\Delta V + M\Delta V + \Delta M U - M V - \Delta M V$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{M \Delta V}{\Delta t} + \frac{\Delta M (V - U)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = F = M \frac{dV}{dt} + \left(\frac{dM}{dt} \right) (V - U) \quad (34)$$

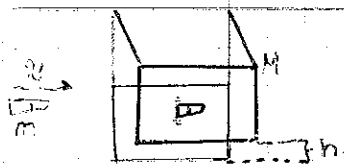
$M \frac{dV}{dt}$ corresponde a la fuerza ejercida si no perdiera o ganara masa

$\frac{dM}{dt} (V - U)$ es el empuje.

$(V - U)$ es la velocidad relativa

(34) es idéntica a 33: solo que F_R aparece como: $F_R = \frac{dM}{dt} U$

Ejemplo 7: medición de la velocidad de un proyectil mediante el péndulo balístico.

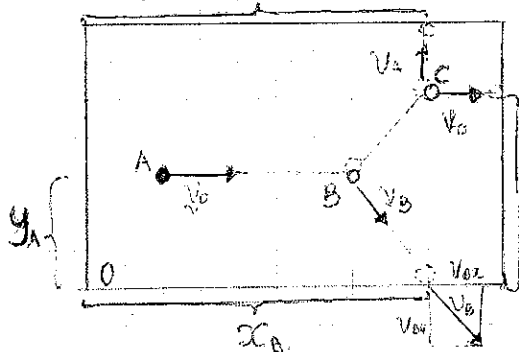


$$\textcircled{1} \quad m v = (m+M) U$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2} (m+M) U^2 = (m+M) g h$$

$$\Rightarrow v = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gh}$$

Ejemplo 8: Sobre una mesa de billar una bola con una velocidad V_0 incide consecutivamente sobre otras dos, produciéndose cambios en sus momentos angulares y lineales, hallar la velocidad final de las tres bolas (suponer que cada una de ellas toca la banda en el mismo instante de tiempo. α_a



Para resolver este problema usamos los tres principios de conservación:

Conservación del momentum lineal.
Conservación del momentum angular.
Conservación de la energía. (en este caso, la energía cinética del choque completamente elástico).

Como no ha fuerzas externas, entonces:

$$P_{\text{ant}} = P_{\text{desp.}} \quad \text{y} \quad L_{\text{ant}} = L_{\text{desp.}}$$

Tomamos los ejes en dirección a las bandas y como origen el punto O.

En el eje x_0 :

$$m V_0 = m V_{ax} + m V_c$$

$$V_0 = V_{ax} + V_c \quad \textcircled{1}$$

En el eje y :

$$0 = m V_a - m V_{by}$$

$$0 = V_a - V_{by} \quad \textcircled{2}$$

$$L = r \times p = r m v \sin \theta \quad (\text{Proyección de } m v \text{ sobre } (r) \text{ y viceversa})$$

$$-V_0 y_A = \alpha_a V_a - \alpha_c V_c - \alpha_b V_{by} \quad \textcircled{3} \quad (\text{dividido todo entre } m)$$

Como es un choque elástico, entonces:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V_a^2 + \frac{1}{2} m V_b^2 + \frac{1}{2} m V_c^2$$

$$V_0^2 = V_a^2 + V_b^2 + V_c^2 \quad \textcircled{4}$$

Obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$V_a, V_{bx}, V_{by}, V_c$$

2) Choque completamente inelástico.

Esta colisión se presenta cuando dos cuerpos colisionan y continúan moviéndose unidos como si fueran ya solo un cuerpo.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \quad \text{entonces,}$$

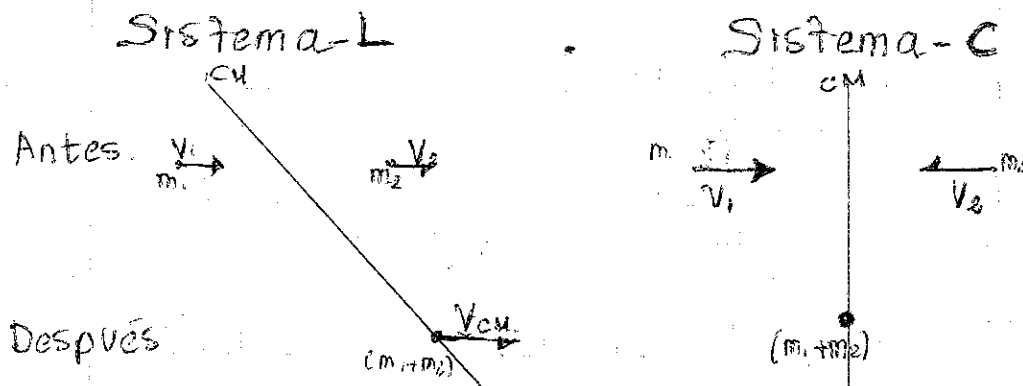
$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_{cm}$$

$$Q = K'' - K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{cm}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$Q = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

$$Q = -\frac{1}{2} \mu v_{1,2}^2 < 0 \quad (31)$$

Como $Q < 0$, entonces hay una disminución de la energía cinética del sistema y la relación es endoérgica.



Coefficiente de Restitución:

El coeficiente de restitución mide la habilidad que tienen las partículas de recuperar su forma después de la colisión es utilizado en ingeniería y se denota por la letra e :

$$e = \frac{|\text{Velocidad relativa después}|}{|\text{Velocidad relativa antes}|} = \frac{|v_2 - v_1|}{|V_2 - V_1|} \quad \text{Para un choque elástico es } 1. \quad \text{Para un inelástico } e = 0$$

Con el coeficiente de restitución las velocidades relativas se pueden expresar así:

$$U_1 = \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 (1 + e)}{m_1 + m_2} v_2 \quad (32A)$$

$$U_2 = \frac{m_1 (1 + e)}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} v_2 \quad (32B)$$

Casos particulares:

a)

$$\text{Si } m_1 = m_2 \rightarrow \begin{aligned} U_1 &= V_2 \\ U_2 &= V_1 \end{aligned}$$

Si la "bola blanco" (m_2) está en reposo: $V_2 = 0$ y

$$\text{b) } m_2 \gg m_1 \rightarrow \begin{aligned} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} &= \frac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1} \approx -1, \wedge U_1 \approx -V_1 \\ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} &= \frac{2m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1} \approx 0, \wedge U_2 \approx 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } m_2 \ll m_1 \rightarrow \begin{aligned} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} &= \frac{m_1/m_1 - m_2/m_1}{m_1/m_1 + m_2/m_1} \approx 1, \wedge U_1 \approx V_1 \\ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} &= \frac{2m_1/m_1}{m_1/m_1 + m_2/m_1} \approx 2, \wedge U_2 \approx 2V_1 \end{aligned}$$

Visto desde el Sistema-c

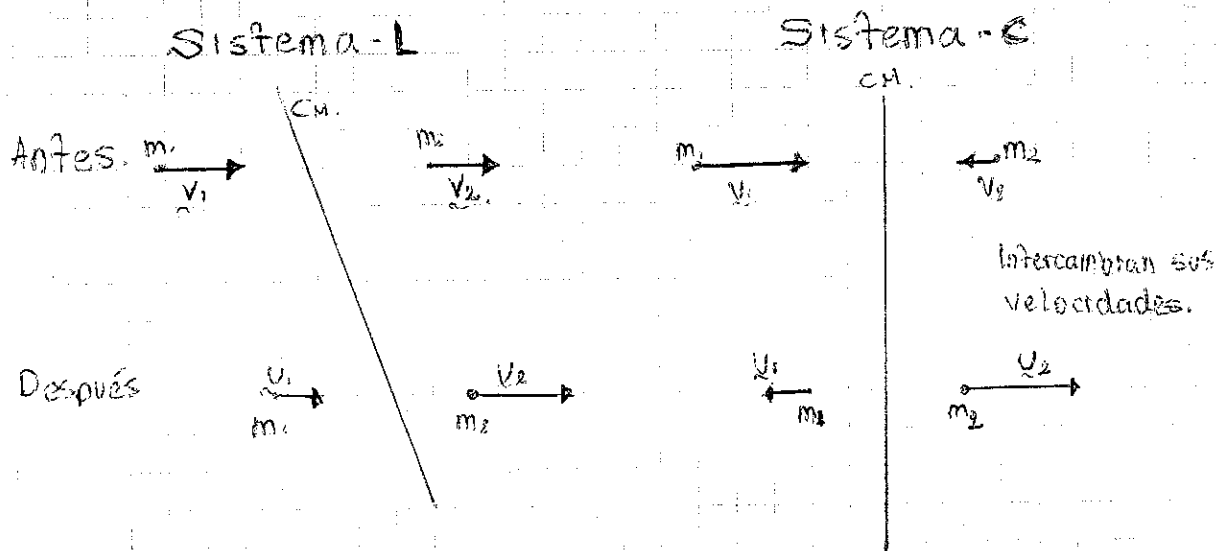
$$V_{cm} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

$$V_1' = V_1 - V_{cm} = \frac{m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} \quad (30a)$$

$$V_2' = V_2 - V_{cm} = \frac{-m_1 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} \quad (30b)$$

$$U_1' = U_1 - V_{cm} = \frac{-m_2 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} \quad (30c)$$

$$U_2' = U_2 - V_{cm} = \frac{m_1 (V_1 - V_2)}{m_1 + m_2} \quad (30d)$$



Si $Q < 0$ hay una disminución de energía cinética acompañada de un aumento de la energía potencial y se dice que la relación es endoenergica (absorbe energía).

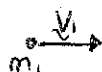
Si $Q > 0$, entonces hay un incremento de energía cinética y se dice que la relación es exoenergica.

Colisión elástica bidimensional.

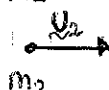
Una partícula de masa m_1 incide con una velocidad V_1 sobre una partícula m_2 con velocidad V_2 . Después de la colisión, m_1 se mueve con una velocidad U_1 y la partícula m_2 se mueve con una velocidad U_2 . Se busca encontrar los valores para U_1 y U_2 .

1. Choque completamente elástico.

antes



después



$$\textcircled{1} \quad F_{\text{ext}} = 0 \rightarrow P_{\text{total}} = \text{cte.}$$

$$\textcircled{2} \quad Q = 0 \rightarrow K_{\text{total}} = \text{cte.}$$

$$\textcircled{3} \quad m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2.$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_1 U_1^2 + \frac{1}{2} m_2 U_2^2$$

$$\text{de } \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{3} \quad m_1 (V_1 - U_1) = m_2 (U_2 - V_2).$$

$$\text{de } \textcircled{2} \rightarrow \textcircled{4} \quad m_1 (V_1^2 - U_1^2) = m_2 (U_2^2 - V_2^2)$$

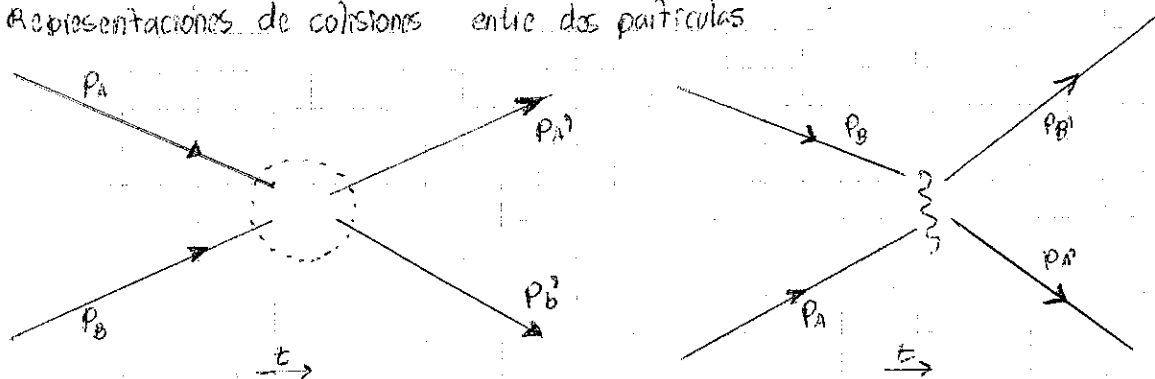
$$\frac{\textcircled{4}}{\textcircled{3}} = \textcircled{5} \quad V_1 + U_1 = U_2 + V_2.$$

$$\textcircled{5} \quad \Rightarrow U_2 = V_1 + U_1 - V_2.$$

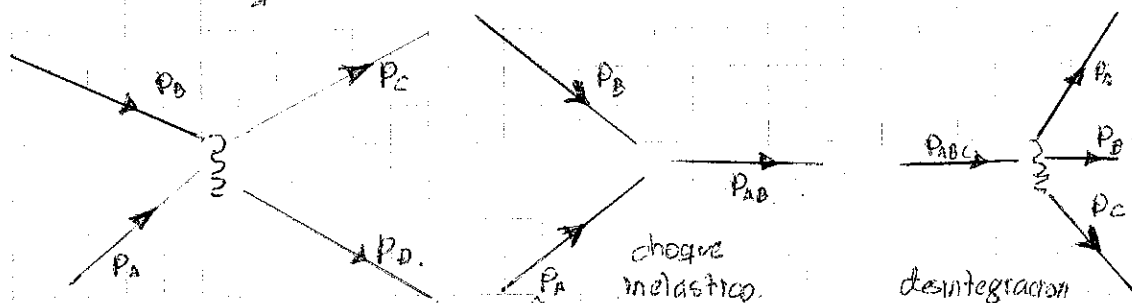
$$\textcircled{6} \text{ en } \textcircled{3} \rightarrow U_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_2 \quad (28).$$

$$(28) \text{ en } \textcircled{5} \rightarrow U_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} V_2 \quad (29).$$

Representaciones de colisiones entre dos partículas



No siempre las mismas partículas que entran son las mismas que salen:



Si se tienen n partículas cada una con una cantidad de movimiento lineal p_1, p_2, \dots, p_n y angular, $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$, entonces, la ley de conservación del momento nos dice que:

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n p_i''$$

$$\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n L_i''$$

p_i'' denota la cantidad de movimiento después de la colisión.

En cuanto a la energía, no siempre se puede decir que la energía interna del sistema se conserva, como suponemos que no hay fuerzas externas, entonces la ecuación (15) nos queda:

$$E_{propia} = E_{propia}''$$

$$\Leftrightarrow K + U^{(int)} = K'' + U^{(int)''}$$

$$\Leftrightarrow K'' - K = U^{(int)''} - U^{(int)} = Q \quad (27)$$

Definimos Q precisamente como esa diferencia, esta definición nos permite clasificar las colisiones de la siguiente manera.

- Si $Q=0$, entonces no hay cambio de energía cinética, y se dice que la colisión es completamente elástica. de lo contrario, ($Q \neq 0$) el choque es inelástico.

Masa Reducida: a partir de la ecuación del movimiento de dos cuerpos en donde sólo actúa la fuerza de interacción entre ellos, vamos a obtener una ecuación reducida de un solo cuerpo de masa μ , y aceleración \ddot{Q}_{12} producida por la fuerza de interacción F_{12} .

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F_{12}} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{F_{21}} \\ 2 \end{array} \quad F_{12} = m_1 \frac{d^2 Q_1}{dt^2} \quad (25a).$$

$$F_{21} = m_2 \frac{d^2 Q_2}{dt^2} \quad (25b).$$

$$\frac{(25a)}{m_1} - \frac{(25b)}{m_2} :$$

$$\ddot{Q}_1 - \ddot{Q}_2 = \frac{F_{12}}{m_1} - \frac{F_{21}}{m_2} \quad (26) \quad \text{como } F_{12} = -F_{21}, \text{ entonces}$$

$$\ddot{Q}_{12} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) F_{12} \quad (26a). \quad \text{entonces}$$

$$F_{12} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \ddot{Q}_{12} \quad (27).$$

el problema de los dos cuerpos lo podemos reducir a un solo cuerpo con la ecuación de movimiento de la forma: $F_{12} = \mu \ddot{Q}_{12}$ es denominada masa reducida.

$$\mu = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Ejemplo 6:

Masa del Sol: $1,99 \times 10^{30} \text{ Kg}$

Masa de la Tierra: $5,97 \times 10^{24} \text{ Kg}$

Masa reducida: $\mu = 5,969 \times 10^{24} \text{ Kg}$

Podemos estudiar el movimiento del sistema sol-tierra considerando un solo cuerpo de masa μ que se mueve bajo la fuerza de interacción entre el sol y la tierra.

Colisiones

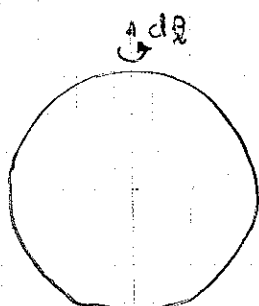
Una colisión es una interacción fuerte entre dos cuerpos, (no necesariamente un choque).

Dicha colisión ocurre en una región relativamente pequeña en el espacio y en un tiempo relativamente corto, pudiéndose hablar de estados iniciales y finales. tiempo relativamente corto se refiere a tomar el tiempo de colisión mucho menor que el tiempo de observación.

Las partículas que actúan en la colisión cambian su momento angular, momento lineal y energía.

Para la representación de las colisiones se usan los diagramas de Feynman:

Isotropía: ahora consideremos el espacio isotrópico, es decir, que al girar nuestro sistema como un todo, este no debe cambiar. consideremos que todas las partículas del sistema giran el mismo ángulo $d\theta$.



$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ij})$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

$$\frac{dL}{dt} = \tau_{ext} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

demostraremos que $\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = 0$.

Al operar con vectores infinitesimales podemos obtener que:

$$\text{Si } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i \quad (24)$$

$\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i$ es el trabajo que hacen la fuerza que actúa sobre i debido a j cuando se desplaza una cantidad $d\mathbf{r}_i$.

$\sum_j \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i$ trabajo total que hacen las fuerzas internas cuando i se desplaza una cantidad $d\mathbf{r}_i$.

$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i$ Suma de todas las fuerzas internas de las partículas del sistema como i, j son términos "mudos" podemos escribir la ecuación así:

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i) + (\mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_j) \text{ reemplazamos } d\mathbf{r}_j \text{ por } d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_j$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\mathbf{F}_{ij} \cdot (d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_i) + \mathbf{F}_{ji} \cdot (d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_j)] \text{ usamos } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$= \frac{d\boldsymbol{\theta}}{2} \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \times \mathbf{r}_j \text{ si asumimos que el espacio es isotrópico, entonces}$$

$\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \times \mathbf{r}_j = 0$. Llegamos al mismo resultado obtenido en 9 sin considerar la tercera ley de Newton en su forma fuerte. Solo bajo la hipótesis de la isotropía del espacio llegamos a que:

$$\tau = \tau_{ext} = \frac{dL}{dt} \quad (9)$$

$$\tau_{ext} = 0 \rightarrow L = cte \quad (9a)$$

Teorema 5: $K_{\text{total}} = K' + K_{\text{cm}}$

Demostración:

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_i' + v)^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i m_i v_i' \cdot v + \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v^2 \\ &= K' + K_{\text{cm}} \end{aligned}$$

Teorema 6: $T' = \frac{dL'}{dt}$

Demostración: usando el teorema 3.

$$L = L' + L_{\text{cm}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL'}{dt} + \frac{dR \times P}{dt} = \frac{dL'}{dt} + \frac{dR \times MV}{dt}$$

$$T = \frac{dL'}{dt} + R \times F_{\text{ext}} = \frac{dL'}{dt} + T_{\text{cm}}$$

Iguálamos con la ecuación del teorema 4.

$$\frac{dL'}{dt} + T_{\text{cm}} = T' + T_{\text{cm}} \rightarrow T' = \frac{dL'}{dt}$$

Manifestación de los conceptos de espacio y tiempo.

Vamos a partir de las características básicas del espacio en el marco de la física clásica, como son homogeneidad e isotropía, para llegar a la conservación de la cantidad de movimiento.

Homogeneidad: Supongamos que el espacio es homogéneo, es decir, que lo que está sucediendo no depende de la interacción del sistema, sino de las propiedades del sistema, sino de la posición del sistema, sino de las interacciones.

En otras palabras, si el sistema está aislado y lo desplazamos como un todo una cierta cantidad, todo sigue igual. Durante ese desplazamiento, entonces, el trabajo que hacen las fuerzas internas es cero.

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(\text{int})} = \int_1^2 \sum_{i,j} F_{ij} \cdot dr_i \quad \text{Como } dL \text{ es arbitrario, obtenemos que:}$$
$$\sum_{i,j} F_{ij} = 0 \quad \text{la suma de las fuerzas internas es cero.}$$

En forma explícita, de la homogeneidad del espacio se deduce el concepto de conservación de la cantidad de movimiento.

Teorema 1: $\sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0$

Demostración:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{\sum_i m_i (\mathbf{r}_i' + \mathbf{R})}{M} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i'}{M} + \frac{\sum_i m_i \mathbf{R}}{M} \quad \text{entonces}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i'}{M} + \mathbf{R} \quad \text{entonces} \quad \sum_i m_i \mathbf{r}_i' = 0$$

Teorema 2: $\sum_i m_i \mathbf{v}_i' = 0$

Demostración:

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{M} = \frac{\sum_i m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{V})}{M} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i'}{M} + \frac{\sum_i m_i \mathbf{V}}{M} \quad \text{entonces}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i'}{M} + \mathbf{V} \quad \text{entonces} \quad \sum_i m_i \mathbf{v}_i' = 0$$

Teorema 3: $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{cm}$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i' + \mathbf{R}) \times m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{V}) \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' + \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{V} + \sum_i m_i \mathbf{v}_i' \times \mathbf{R} + \sum_i \mathbf{R} \times m_i \mathbf{V} \end{aligned}$$

Usando los dos teoremas anteriores, los términos del medio se cancelan.

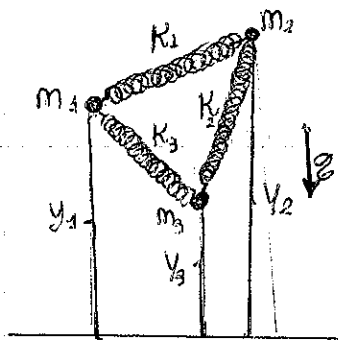
$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i' + \mathbf{R} \times M \mathbf{V} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{cm}$$

Teorema 4: $\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}_{cm}$

Demostración: $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{ext}$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{R}) \times m_i \frac{d(\mathbf{v}_i' + \mathbf{V})}{dt} \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i'}{dt} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{a}_{cm} + \sum_i \mathbf{R} \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i'}{dt} + \sum_i \mathbf{R} \times m_i \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i' + \mathbf{R} \times M \mathbf{a}_{cm} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times \frac{d\mathbf{p}_i'}{dt} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{ext} \\ &= \mathbf{I}' + \mathbf{I}_{cm} \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Expresar la energía interna del sistema mostrado en la figura, en donde d_1, d_2, d_3 , son las longitudes de los resortes en sus posiciones de equilibrio.



Todas las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas son conservativas, entonces,

$$E = U_{int} + U_{ext} + K$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij} + \sum_i U_i + \sum K_i$$

Energía potencial interna: recuperadora, dada por $E_{pot} = \frac{1}{2} K \Delta x^2$.

Energía potencial externa: gravitacional, dada por $E_{pot} = mgh$.

$$E = \frac{(2)}{4} [K_1 (d_1 - s_1)^2 + K_2 (d_2 - s_2)^2 + K_3 (d_3 - s_3)^2] + (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) g + \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2)$$

Sistema de Referencia del centro de masas.

Para el estudio de la mecánica de muchas partículas, suelen utilizarse dos sistemas de referencia.

Sistema L- de referencia: (Laboratorio). : S

Sistema C- de referencia: (centro de masas). : S'

Energía interna del Sistema:

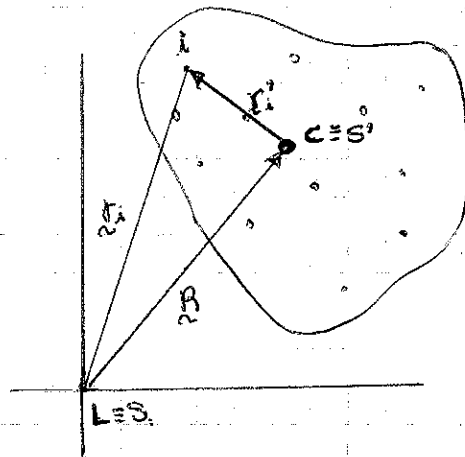
$$E_{interna} = K' + U^{(int)} \quad (23)$$

Vamos a resumir la teoría con cuatro teoremas, usando los siguientes enunciados.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{M} = \vec{R}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} = \vec{V}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_i' + \vec{R} &= \vec{r}_i \\ \vec{v}_i' + \vec{V} &= \vec{v}_i \end{aligned}$$



Supongamos ahora que $F_i^{(e)}$ y V_i son conservativas, entonces

$$F_i^{(e)} = -\nabla_i U_i \quad (17)$$

En donde la energía potencial se expresa únicamente en función del vector posición de la partícula i (r_i), entonces.

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2}^{(ext)} &= \sum_i \int_1^2 F_i^{(e)} dr_i \\ &= \sum_i \int_1^2 -\nabla_i U_i dr_i \\ &= \sum_i U_{i1} - \sum_i U_{i2} \end{aligned}$$

Definimos:

$$U^{(ext)} = \sum_i U_i \quad (18) \quad \text{energía potencial externa.}$$

y obtenemos que.

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(ext)} = U_1^{(ext)} - U_2^{(ext)} \quad (19)$$

Reemplazamos (19) y (16) en la ecuación 13 y obtenemos que

$$\begin{aligned} U_1^{(ext)} - U_2^{(ext)} + U_1^{(int)} - U_2^{(int)} &= K_2 - K_1 \\ \rightarrow \underbrace{K_1 + U_1^{(ext)} + U_1^{(int)}}_{E_{total1}} &= \underbrace{K_2 + U_2^{(ext)} + U_2^{(int)}}_{E_{total2}} \quad (20) \end{aligned}$$

Definimos E_{total1} E_{total2}

Y obtenemos que cuando las fuerzas, tanto internas como externas, que actúan sobre cada una de las partículas son de tipo conservativo, la energía total se conserva.

$$\text{si } F_i \text{ es conservativa} \rightarrow E_{total} = cte. \quad (21)$$

$$\begin{aligned} E_{total} &= (U^{(ext)} + U^{(int)}) + K = U^{(total)} + K \\ &= \left(\sum_i U_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij} \right) + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (22) \end{aligned}$$

En donde $U^{(total)}$ es una función que depende de la configuración del sistema: $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$

Casos particulares

Supongamos que las fuerzas internas que actúen en el sistema sean de tipo conservativo, entonces:

$$\begin{aligned} F \text{ es conservativo} &\rightarrow F = -\nabla U \\ F_{ij} \text{ es conservativo} &\rightarrow F_{ij} = -\nabla_i U_{ij} \end{aligned} \quad (14)$$

donde U_{ij} expresa la energía potencial de interacción de la partícula i con la partícula j , en función de la distancia entre ellos: $F_{ij} = |r_i - r_j|$, entonces:

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2}^{(int)} &= \sum_{i,j} \int_1^2 F_{ij} \cdot dr_i \\ &= \int_1^2 \sum_{i,j} F_{ij} \cdot dr_i \quad \text{sumamos y dividimos por dos e intercambiamos los términos} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} \sum_{i,j} (F_{ij} \cdot dr_i + F_{ji} \cdot dr_j) \quad \text{de (14) obtenemos} \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} \sum_{i,j} (-\nabla_i U_{ij} \cdot dr_i - \nabla_j U_{ji} \cdot dr_j) \quad \text{la expresión interior es una diferencial total} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_1^2 -dU_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{2ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{1ij} \end{aligned}$$

Definimos

$$U^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij} \quad (15) \quad \text{energía potencial interna.}$$

y obtenemos que

$$\text{Si } F_{ij} \text{ es conservativa} \rightarrow W_{1 \rightarrow 2}^{(int)} = U_1^{(int)} - U_2^{(int)} \quad (16)$$

Reemplazando esta fórmula de la ecuación (13) obtenemos que

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(Ext)} = \underbrace{(K_2 + U_2^{(int)})}_{E_{propia 2}} - \underbrace{(K_1 + U_1^{(int)})}_{E_{propia 1}} \quad (14)$$

$$\text{Definimos} \quad E_{propia 2} \quad E_{propia 1} \quad (14a)$$

obtenemos que el trabajo que hacen las fuerzas externas cuando las fuerzas internas son conservativas equivale al cambio de la energía propia del sistema.

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(ext)} = E_{propia 2} - E_{propia 1} \quad (15) \quad \text{donde}$$

$$E_{propia} = K + U^{(int)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij} \quad (16)$$

Energía y Trabajo en un sistema de partículas

En el capítulo anterior vimos que el estado de una partícula se podía determinar por dos cantidades físicas: \mathbf{r} y \mathbf{v} . En el estudio de los sistemas de muchas partículas esta definición recibe otro nombre; la configuración, y esta dada por $2n$ cantidades físicas: $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n)$
 $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$

Recordemos el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_B - K_A.$$

la ecuación (1) nos dice que las fuerzas sobre i están dadas por:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)}$$

El teorema del trabajo y la energía para la partícula i cuando el sistema pasa de la configuración 1 a la configuración 2 queda así:

$$W_{i1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \left(\sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)} \right) d\mathbf{r}_i = \int_1^2 \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} d\mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \int_1^2 \mathbf{p}_i d\mathbf{p}_i = K_{i2} - K_{i1}.$$

Para obtener el trabajo realizado sobre todo el sistema para pasar de la configuración 1 a la configuración dos, realizamos la suma sobre todos los i -es ($i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$).

$$\sum_i W_{i1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} = \sum_i \left[\int_1^2 \sum_j (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{(e)}) d\mathbf{r}_i \right] = \sum_i (K_{i2} - K_{i1}).$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \sum_{i,j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i + \int_1^2 \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i = \sum_i K_{i2} - \sum_i K_{i1}.$$

Definimos:

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(ext)} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^{(e)} d\mathbf{r}_i \quad (10) \quad \text{trabajo realizado por las fuerzas externas.}$$

$$W_{1 \rightarrow 2}^{(int)} = \sum_{i,j} \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} d\mathbf{r}_i \quad (11) \quad \text{trabajo realizado por las fuerzas internas}$$

$$K = \sum_i K_i \quad (12) \quad \text{energía cinética del sistema}$$

Y obtenemos el teorema del trabajo y la energía para un sistema de partículas.

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}^{(ext)} + W_{1 \rightarrow 2}^{(int)} = K_2 - K_1. \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 T \cos \theta &= mg & (1) & \text{Para hallar } \theta_1: \theta_1 = \tan^{-1} \frac{r_2}{l_1} \approx 11^\circ 20' \\
 T \sin \theta &= m \omega^2 r & (2) & \\
 L &= r_1 m \omega & (3) & \tau_1 = \frac{mg}{\cos \theta_1} = 612 \text{ N.} \\
 L_1 &= L_2 & (4) &
 \end{aligned}$$

$$(2) T \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v^2 = \frac{r T \sin \theta}{m} \rightarrow v \approx 2 \text{ ms}^{-1}$$

$$T_2 \cos \theta_2 = mg \rightarrow T_2 = 692,82 \text{ N}$$

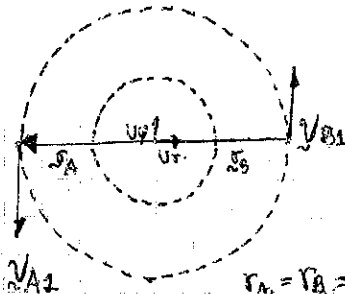
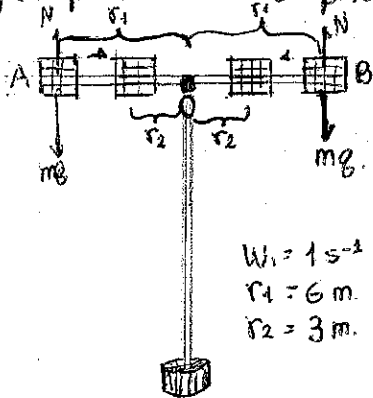
$$(4) r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \rightarrow T_2 \sin \theta_2 = \frac{m \omega_2^2 r_2}{r_1 \omega_1} \rightarrow \omega_2 = 2,85 \text{ ms}^{-1}$$

$$(2) T_2 \sin \theta_2 = m \frac{\omega_2^2 r_2}{r_1} \rightarrow \omega_2 = 1,4 \text{ ms}^{-1}$$

$$l_2 = 2,8 \text{ m}$$

$$W = \frac{v}{r} \rightarrow W_1 = 1 \text{ s}^{-1} \quad W_2 = 2 \text{ s}^{-1}$$

Ejemplo 4: Se planea construir un dispositivo mecánico para un parque de diversiones, dos cuerpos de masa m están montados sobre una barra de peso despreciable que gira en un plano horizontal. Cuando los cuerpos están a una distancia r_1 de O la barra gira con una rapidez angular ω_1 , un mecanismo interno mueve las canastillas hacia O hasta la posición r_2 , calcular la rapidez angular de las canastillas en esa posición.



$T = T_A + T_B = 2r_1(\omega_1) \times (mg + N + F_L - W) = 0$
 entonces la cantidad de momentum angular se conserva.

$$L = L_A + L_B = 2r_1 \omega_1 \times m v \omega_1 = 2r m v \omega = \text{cte.}$$

$$(1) 2r_1 m v_1 = 2r_2 m v_2 \text{ donde } v = \omega r$$

$$\Rightarrow m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$$

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1 & \omega_1 &= 1 \text{ rad s}^{-1} & \omega_2 &= 4 \text{ rad s}^{-1} \\
 v_2 &= \frac{r_1^2}{r_2} \omega_1 & & & & \text{se cuadruplica.} \\
 v_2 &= 6 \text{ ms}^{-1} & v_2 &= 12 \text{ ms}^{-1} & & \text{se duplica.}
 \end{aligned}$$

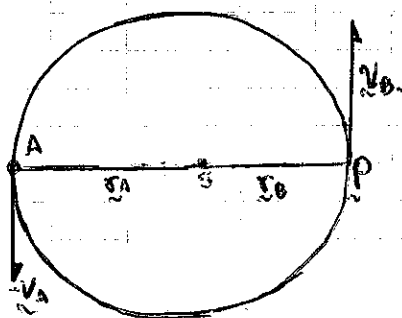
Bajo esta condición, la ecuación anterior nos queda:

$$\dot{L} = \dot{L}_{ext} = \frac{dL}{dt} \quad (9)$$

Si $\dot{L}_{ext} = 0 \rightarrow L = cte \quad (9a)$

A pesar de que partimos de una suposición para llegar a esta ley, esta se cumple de una forma completamente general.

Ejemplo 2: Cuando la Tierra está en el apogeo (21 Junio) su distancia al sol es de $1,52 \times 10^{11}$ metros y su velocidad es de $2,93 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$. encontrar la velocidad de la tierra en el perigeo. encontrar la velocidad de la tierra en el perigeo, en donde la distancia es de $1,47 \times 10^{11} \text{ m}$. cual es la velocidad angular de la misma en ambos casos:



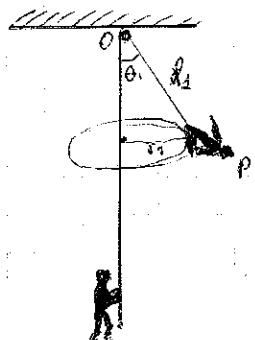
$$L_i = L_f \quad L = m r \times v$$

$$r_A \times v_A = r_B \times v_B \quad \alpha = 90^\circ = \pi/2$$

$$r_A \times v_A = r_B \times v_B$$

$$v_B = \frac{r_A}{r_B} \times v_A$$

Ejemplo 3: Un acróbata de masa m cuelga de sus tobillos en el extremo de una cuerda soportada por un eslabon giratorio alrededor del eje Y . inicialmente se mueve alrededor de un círculo de radio r_1 con una longitud de la cuerda $OP = 10 \text{ m}$; cuando esto está sucediendo el ayudante hala la cuerda provocando que el ángulo aumente de θ_1 a $\theta_2 = 30^\circ$ de tal manera que se mueve en una nueva órbita circular de radio r_2 con velocidad v_2 . calcular v_1 y θ_1 para el movimiento inicial.



v_2 y r_2 para el movimiento final.

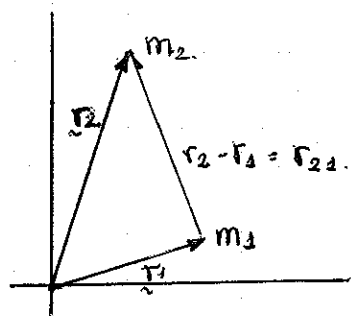
$$m = 60 \text{ Kg.}$$

$$r_1 = 2 \text{ m.}$$

$$l_1 = 10 \text{ m.}$$

$$\theta_2 = 30^\circ$$

Teorema 2: El centro de masas de dos partículas está ubicado a lo largo de la línea recta que conecta las dos partículas.



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 (\vec{r}_1 + \vec{r}_{21}))$$

$$= \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_{21} = \vec{r}_1 + K \vec{r}_2, \quad K = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

que corresponde a la ecuación vectorial de la recta en donde $0 < K < 1$.

Si $m_1 = m_2 \rightarrow K = \frac{1}{2}$; si $m_1 \gg m_2 \rightarrow K \approx 0$; si $m_1 \ll m_2 \rightarrow K \approx 1$.

Aplicando un procedimiento análogo al utilizado para llegar al principio de conservación del momentum lineal, podemos llegar al principio de conservación del momentum angular.

El momentum angular total se puede definir como la suma de momentum angular de cada una de las partículas:

$$\vec{L}_{total} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (7)$$

El torque total, asimismo, es la suma de los torques individuales

$$\vec{\tau}_{total} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}_{total}}{dt} \quad (8)$$

$$\vec{\tau}_{total} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(e)}) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$$

definimos $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}$ como torque externo total ($\vec{\tau}_{ext}$).

volviendo a las ecuaciones (6): $\vec{F}_i^{(a)} = \sum_j \vec{F}_{ij}$, la ecuación anterior nos queda:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{ext} + \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$$

aplicamos la tercera ley de Newton en su forma débil: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

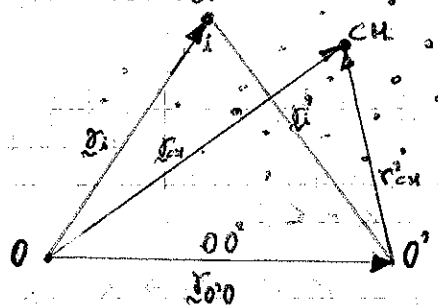
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{ext} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \times (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

Si suponemos la validez de la tercera ley de Newton, en su forma fuerte, que dice que las dos fuerzas de acción y reacción actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas, los dos vectores de la ecuación son paralelos y este término se cancela:



Teorema 0. La posición del centro de masas de un sistema es independiente del sistema de referencia que se utilice. en otras palabras, el centro de masas es una propiedad del sistema que sólo depende de la distribución de las masas.

Demostración:



$$r_{OO'} + r'_i = r_i$$

$$r_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{M}$$

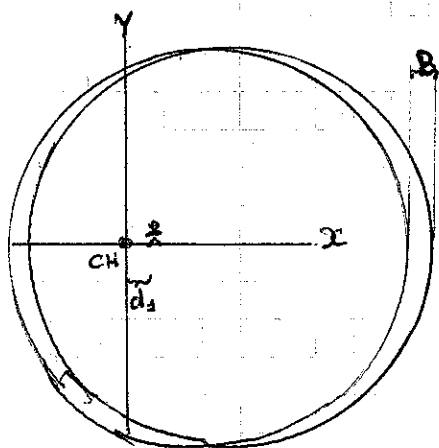
$$r_{CM}^2 = \frac{\sum m_i r_i^2}{M}$$

$$r_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{M} = \frac{\sum m_i (r'_i + r_{OO'})}{M} = \frac{\sum m_i r'_i}{M} + \frac{M r_{OO'}}{M} \text{ entonces,}$$

$$r_{CM} = r'_{CM} + r_{OO'}$$

Es muy usual colocar el sistema de referencia en el centro de masas. La razón de esto es que desde el centro de masas hay muchos problemas que se simplifican, como se verá mas adelante.

Ejemplo 1: En una maniobra de acoplamiento de dos naves espaciales aun los cambios pequeños en sus posiciones tienen importancia. Supongamos que el peso total de un vehículo espacial con su tripulación es de 2.500 Kg. ¿Cuál es el desplazamiento permisible de un astronauta de 70 Kg ubicado en el centro de masas para limitar el desplazamiento de la nave a 1 cm.



$$F_{ext} = M \frac{dV_{CM}}{dt} = 0.$$

$$V_{CM} = cte.$$

En el acoplamiento, la velocidad en dicha dirección es nula. y por lo tanto $V_{CM} = cte.$ lo ubicamos en el centro de coordenadas para que:

$$R_{CM} = 0 \Rightarrow M_V R_V + m d = 0.$$

$$d = - \frac{M_V R_V}{m} \quad \begin{array}{l} M_V = 2.500 \text{ kg.} \\ R_V = \pm 0,01 \text{ m} \\ m = 70 \text{ kg.} \end{array}$$

$$d = \pm 34,7 \text{ cm.}$$

Esta última ecuación nos dice que todo un gran sistema se comporta como una sola partícula, en donde las fuerzas internas se cancelan entre sí. ahora encontremos la posición (r_{cm}) y la velocidad (v_{cm}) de dicha partícula.

(4a) $P = \sum_i p_i = \sum_i m_i v_i$ momentum total del sistema.

(4b) $P = M v_{cm}$ despejamos v_{cm} reemplazando P en (4a)

(5) $v_{cm} = \frac{P}{M} = \frac{\sum_i m_i v_i}{M}$ donde $M = \sum_i m_i$.

(6) $r_{cm} = \frac{\sum_i m_i r_i}{M}$

Entonces, todo el gran sistema se comporta como una sola partícula con masa M , velocidad v_{cm} , posición r_{cm} donde actúa una fuerza externa $F^{(ext)}$.

(Nuestra restricción es que el sistema permanezca con masa constante).

Supongamos que en ese sistema no actúan fuerzas externas o dichas fuerzas se anulan: $F^{(ext)} = 0$, entonces la ecuación (3) nos dice que la cantidad de movimiento se conserva. Esta ley es completamente general.

$F^{(ext)} = 0 \rightarrow P = cte.$

Promedio ponderado.

Regla para sacar promedio:

Si cada una de las cantidades se repite determinadas veces, este es un promedio ponderado:

suma de cantidades

número de cantidades.

4 2 1 10 8 ← veces que se repite qv.

1.3. 1.5.4 ← cantidades

número de cantidades.

r_{cm} y v_{cm} , promedio ponderado:

$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$

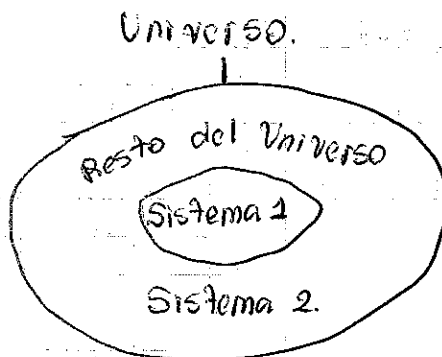
$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$

r_1 se repite m_1 veces

r_2 se repite m_2 veces

Sistema y Resto del universo.

Las interacciones entre un sistema y el resto del universo se pueden estudiar considerando el universo como otro sistema con las mismas propiedades. estos dos sistemas forman un gran sistema en donde la cantidad de movimiento se conserva:



Sistema de Partículas:

Consideremos un sistema de n partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_n en donde sobre cada una de ellas actúan una serie de fuerzas tanto internas como externas.

denotamos $F_i^{(e)}$ la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula i , externas.

Asimismo, denotamos $F_i^{(in)}$ la suma de todas las fuerzas internas que actúan sobre la partícula i , a saber:

$$F_i^{(i)} = \sum_{j=1}^n F_{ij} = \sum_{j \neq i} F_{ij} \quad \text{el signo "i" designa que } i \neq j, \text{ puesto que la partícula } i \text{ no interactúa con ella misma.}$$

tenemos n ecuaciones idénticas a la anterior: $\{i=1, 2, 3, \dots, n\}$ el estado del sistema se obtiene entonces por $\{x_i(t), y_i(t)\}$ 2n cantidades vectoriales y n cantidades escalares.

Ecuación del movimiento para la partícula i .

$$F_i^{(i)} + F_i^{(e)} = \sum_{j=1}^n F_{ij} + F_i^{(e)} = \frac{dp_i}{dt} \quad (1)$$

Sumamos las n ecuaciones: $\{i=1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij} + \sum_{i=1}^n F_i^{(e)} = \sum_{i=1}^n \frac{dp_i}{dt} \quad (2)$$

$$= \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i^{(e)} = \sum_i \frac{dp_i}{dt} \quad (2a)$$

El primer miembro de la ecuación (2a) lo forman las parejas de acción y reacción, el cual lo podemos escribir como:

$$\sum_{i,j} F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (F_{ij} + F_{ji}) \quad \text{("i" y "j" son términos "muertos") se suma dos veces y se divide por dos.}$$

Aplicando la tercera ley de Newton en su forma débil:

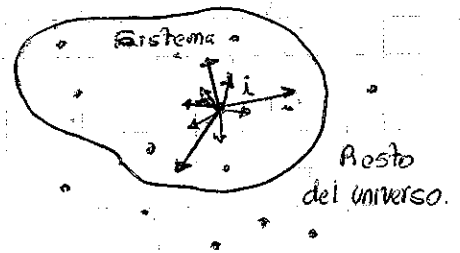
$$F_{ij} = -F_{ji} \quad \forall i \neq j \quad \begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ F_{ij} \text{ y } F_{ji} \text{ no están necesariamente sobre la misma recta.} \end{matrix}$$

$$\text{obtenemos que } \sum_{i,j} F_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (F_{ij} - F_{ij}) = 0$$

Entonces, la ecuación (2a) se reduce a:

$$\sum_i F_i^{(e)} = \sum_i \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i p_i$$

$$F^{(ext)} = \frac{dP_{total}}{dt} \quad (3)$$

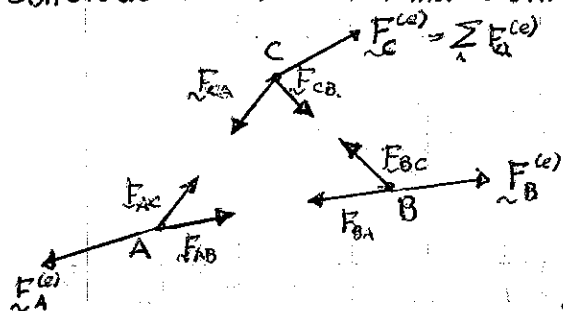


Segunda Parte

Mecánica de Muchas Partículas

Ahora consideraremos un problema mas realista e importante como es el estudio de la dinámica de un sistema de partículas. Para ello iniciamos retomando la tercera ley de Newton y el principio de conservación del momentum para así llegar a la ecuación fundamental de la dinámica clásica en un sistema de partículas.

Consideremos un sistema formado de tres partículas.



Ecuación del movimiento para cada una de las partículas.

$$\begin{aligned}\sum \vec{F}_A &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_A^{(e)} = m_A \vec{a}_A \\ \sum \vec{F}_B &= \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_B^{(e)} = m_B \vec{a}_B \\ \sum \vec{F}_C &= \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{CB} + \vec{F}_C^{(e)} = m_C \vec{a}_C \\ \vec{F}_{AB} &= -\vec{F}_{BA} ; \vec{F}_{AC} = -\vec{F}_{CA} ; \vec{F}_{CB} = -\vec{F}_{BC}\end{aligned}$$

Al sumar las tres ecuaciones, las fuerzas internas se anulan y nos queda que:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A^{(e)} + \vec{F}_B^{(e)} + \vec{F}_C^{(e)} &= m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B + m_C \vec{a}_C = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} + \frac{d\vec{p}_C}{dt} \\ &= \sum \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)} = \frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i \rightarrow \vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (1)\end{aligned}$$

Si $\vec{F}^{(e)}$ es igual a cero, entonces el momentum lineal permanece constante. La ecuación "nro" (1) se puede definir de la forma:

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d}{dt} M \vec{V} \quad \text{si definimos } \vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3}{M} \quad (2)$$

y a partir de \vec{V} definimos \vec{R} como:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} \rightarrow \vec{V} dt = d\vec{R} \rightarrow \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{M}$$

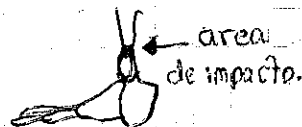
Así, el sistema de tres partículas se puede considerar como un solo sistema cuyo vector posición es \vec{R} , velocidad \vec{V} y sobre el cual actúa una fuerza externa total $\vec{F}^{(e)}$.

designaremos \vec{V} como velocidad del centro de masas \vec{V}_{cm} y \vec{R} como centro de masas \vec{R}_{cm} .

generalizamos este mismo problema a un sistema de n partículas:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta P}{t} = \frac{mV_0}{t} \quad \text{reemplazando lo obtenido en (1) y (2)}$$

$$\langle F \rangle = \frac{mV_0^2}{2d} = mg \frac{h}{d} = 100 mg = 80000 \text{ N}$$



Ahora: $\frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{8 \times 10^4 \text{ N}}{5 \text{ cm}^2} = 1,6 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$ es exactamente el máximo valor de Fuerza por unidad de área que soporta el hueso.

Efecto de amortiguación de las piernas:

Supongamos que la persona amortigua la caída flexionando las rodillas 50 cm en este caso la Fuerza por unidad de área corresponde a $\frac{mgh}{d} = 640 \text{ N/cm}^2$

Paralelamente a la definición de impulso, podemos definir el impulso angular así:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \rightarrow \int_{t_0}^t \tau dt = \int_{L_0}^L dL \rightarrow L = L_0 + \int_{t_0}^t \tau dt$$

la integral $\int_{t_0}^t \tau dt = L - L_0$ nos dice que el impulso angular equivale al cambio de momentum angular,

además,

$$\langle \tau \rangle = \frac{\int_{t_0}^t \tau dt}{\Delta t} = \frac{I'}{\Delta t} = \frac{L(t) - L(t_0)}{\Delta t}$$

Primero hallamos la mínima fuerza que puede recibir el paracaidista.

$$\text{Fuerza} = 3 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times 0,4 \text{ m}^2 = 1,2 \times 10^5 \text{ N}$$

$$P_i = 55 \text{ m/s} \times 80 \text{ kg} = 4400 \text{ kgms}^{-1}$$

$$P_f = 0 \text{ kgms}^{-1}$$

$$\Delta P = 4400 \text{ kgms}^{-1} = I \approx F \Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta P}{F} = 0,0366 \text{ s}$$

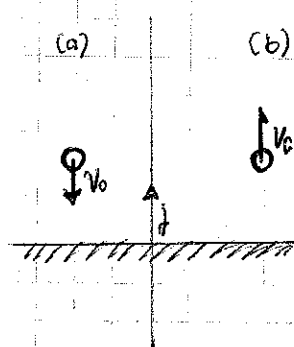
$$\langle V \rangle = \frac{V_f - V_i}{2} = 27,5 \text{ ms}^{-1}$$

$$d = \langle V \rangle \Delta t = 1 \text{ m.}$$

Entonces, para que tenga posibilidades del 50% de sobrevivir, el paracaidista debe caer en una superficie lo suficientemente blanda como para que pueda abrir un hueco de un metro.

Ejemplo 11

Estudiar el rebote de una bola de caucho sobre el piso, si su masa es $m = 0,2 \text{ kg}$ y velocidad $v = 8 \text{ ms}^{-1}$, si rebota aproximadamente con la misma velocidad. ($\Delta t = 10^{-3} \text{ seg.}$)



$$(b) \quad \langle F \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} F dt = \frac{P(t_i + \Delta t) - P(t_i)}{\Delta t}$$

$$\langle F \rangle = \frac{[8 \text{ ms}^{-1}] - [-8 \text{ ms}^{-1}]}{10^{-3} \text{ s}} (0,2 \text{ kg}) = 320 \text{ N}$$

$$= 3200 \text{ kgf}$$

Impulso que suministra el peso.

$$I = \int_{t=0}^{t=10^{-3}} F \cdot dt = \int_0^{10^{-3}} -mg \cdot dt = 2 \times 10^{-3} \text{ N.s} \quad \text{es muy pequeño comparado con } \langle F \rangle$$

Ejemplo 12: Humanos y animales reducen instintivamente estas fuerzas mientras corren y saltan flexionando las extremidades, si cayeran rigidamente, aumentarían mucho las posibilidades de lesionarse. Supongamos que un hombre de 80 kg de peso, cae desde una altura de 20 metros rigidamente, comprimiéndose apenas 2 cm, el área de impacto (base de los tobillos) es de 5 cm^2 y la compresibilidad del hueso es de $1,6 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$. Si el hombre cae en esas condiciones, diría que se va a fracturar.

$$r = r_0 + \frac{v_i + v_f}{2} (t - t_0) \quad \text{estimación de lo que sucede durante la colisión tomamos } r_0 = 0 \text{ y } v = 0,$$

$$r = d = \frac{v_0}{2} t \rightarrow t = \frac{2d}{v_0} \quad (1) \quad \text{tiempo que dura la colisión}$$

$$v_0^2 = 2gh \quad (2) \quad \text{según el ejemplo 19}$$

Impulso:

El impulso es equivalente al cambio de momentum de un sistema y es un concepto que aparece en la resolución de la ecuación fundamental de la dinámica. A partir de este concepto se puede resolver problemas en donde actúa una fuerza muy grande en un intervalo muy corto de tiempo.

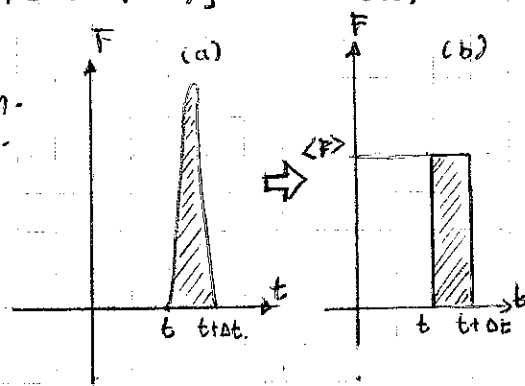
$$F = \frac{dP}{dt} \rightarrow \int_{t_0}^t F dt = P - P_0 = I \quad (1)$$

Si pudiéramos medir dicho intervalo, podríamos obtener la fuerza promedio sobre el cuerpo:

$$\langle F \rangle = \frac{I}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F(t) dt = \frac{1}{\Delta t} [P(t+\Delta t) - P(t)] \quad (2)$$

En una gráfica de fuerza en función del tiempo, el impulso representa el área bajo la curva.

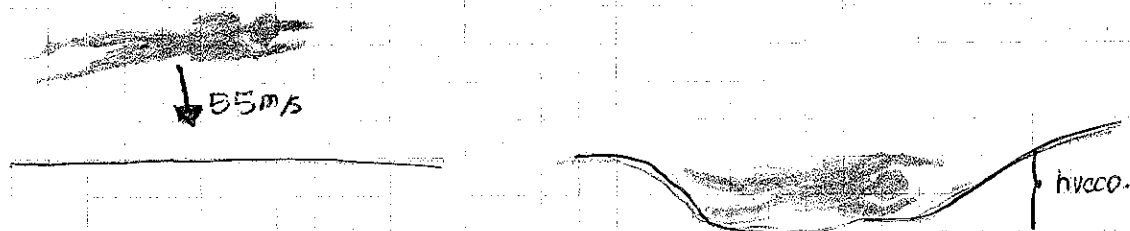
Las dos curvas (a) y (b), contienen la misma área.



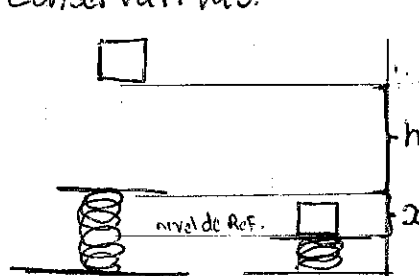
Ejemplo 10: Algunos paracaidistas han sobrevivido a saltos donde el paracaídas no se abre. Una persona de 80 kg de peso cae en una posición horizontal y adquiere una velocidad terminal de 55 m/s . El área de impacto es de $0,4 \text{ m}^2$. ¿Cuál debe ser la mínima profundidad del hueco para que la persona tenga un chance de un 50% de sobrevivir?

Experimentos muestran que una persona tiene más posibilidades de sobrevivir si las fuerzas sobre ella se hacen sobre áreas grandes, en lugar de estar concentradas en un área pequeña.

Una persona tiene una posibilidad mayor del 50% de sobrevivir si la fuerza por unidad de área es menor que $3 \times 10^5 \text{ N/m}^2$.



Ejemplo 8: Un cuerpo de masa m choca con un resorte comprimiéndolo. ¿cuál es la máxima compresión del resorte? a lo largo de todo el movimiento sólo actúan fuerzas conservativas.



$$E_1 = mgh + x_e$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k x_e^2$$

$$E_1 = E_2$$

$$mgh + x_e = \frac{1}{2} k x_e^2$$

$$x_e^2 = \frac{2mgh + x_e}{k}$$

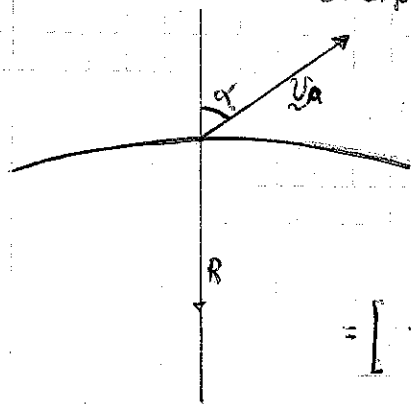
$$x_e^2 - \frac{2mg}{k} x_e - \frac{2mgh}{k} = 0$$

$$x_e = \frac{\frac{2mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 + \frac{8mgh}{k}}}{2} = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}}{k}$$

Ejemplo 9: Velocidad de escape

Se define como el valor de la rapidez que debe tener un cuerpo al arrancar de un determinado planeta para que alcance el infinito con una velocidad igual a cero.

Un cuerpo es lanzado de la superficie de la tierra con una velocidad v_0 con un ángulo α con la vertical. ¿cuánto debe valer v_0 si el cuerpo a de escapar de la tierra.



$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \left(-\frac{GmM}{r^2} \right) \cdot (r d\varphi + dr)$$

$$= \int_A^B -\frac{GmM}{r^2} dr \quad A = R \quad B \rightarrow \infty$$

$$= \left[\frac{GmM}{r} \right]_R^{\infty} = -\frac{GmM}{R} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$v_0 \rightarrow 0$, entonces $v_A = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 11000 \text{ ms}^{-1}$ en la tierra.

Esta es la velocidad que debe poseer para librarse de la atracción gravitacional de la tierra, y ella no depende del ángulo de la velocidad ni de la masa del cuerpo.

Para hallar d_2 , cambiamos de nivel de referencia (n_2).

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg \sin \varphi (d_1 + d_2)$$

$$E_C = \frac{1}{2} K d_2^2$$

$$W_{A \rightarrow C}^{(FV)} = -\mu mg \cos \varphi (d_1 + d_2) = E_C - E_A$$

$$-\mu mg \cos \varphi (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} K d_2^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 - mg(d_1 + d_2) \sin \varphi$$

$$\frac{1}{2} K d_2^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg(d_1 + d_2) (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$$

$$K = \frac{m v_A^2 + 2mg(d_1 + d_2) (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)}{d_2^2} = 2084 \text{ N/m}$$

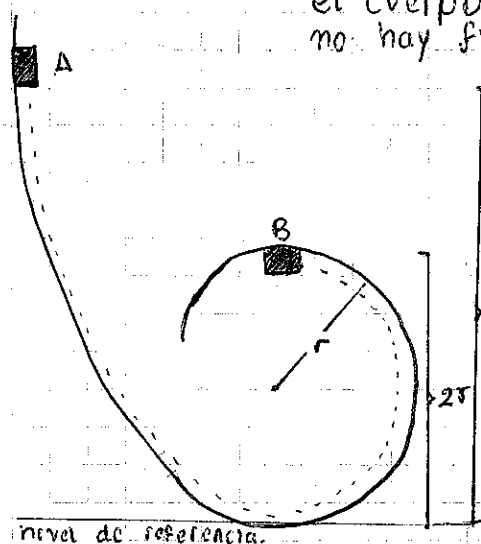
Para hallar la distancia con que rebota; usamos n de ref 2

$$E_C = \frac{1}{2} K d_2 \quad E_D = d_3 mg \sin \varphi$$

$$W_{C \rightarrow D}^{(NC)} = E_D - E_C \rightarrow -\mu d_3 mg \cos \varphi = d_3 mg \sin \varphi - \frac{1}{2} K d_2^2$$

$$d^3 = \frac{\frac{1}{2} K d^2}{mg(\sin \varphi + \mu \cos \varphi)} = 3,1 \text{ m}$$

Ejemplo 7: Determinar la mínima altura para que al soltar el cuerpo este describa la trayectoria circular. no hay fricción



Con estas condiciones, en B la normal debe valer cero.

Calculamos la velocidad en B.

$$N + mg = m \frac{v_B^2}{r} \quad N = 0$$

$$\Rightarrow mg = \frac{m v_B^2}{r} \quad v_B = \sqrt{rg}$$

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 + 2mgr$$

$$E_A = mgh$$

$$E_B = E_A \rightarrow \frac{1}{2} mgr + 2mgr = mgh \rightarrow \frac{5}{2} mgr = mgh \rightarrow h = \frac{5}{2} r$$

$$iii) E = K + U; E_1 = \frac{1}{2} m V_A^2 + m g h_A \quad E_1 = E_2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} m V_B^2 + m g h_B \quad y_A = (r - r \cos \varphi) + d$$

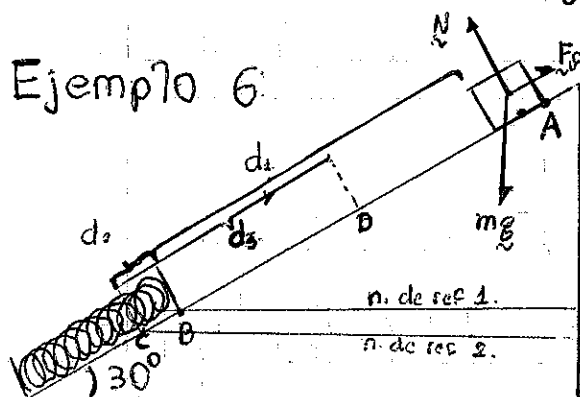
$$y_B = (r - r \cos \varphi) + d$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 + m g (r - r \cos \varphi) + m g d = \frac{1}{2} m V_B^2 + m g (r - r \cos \varphi) + m g d$$

$m g d$ se cancela a ambos lados, lo que significa que no importa el punto de referencia que se tome, la variación de la energía potencial es la misma. Pero la diferencia entre los puntos inicial y final es la misma.

$$\frac{1}{2} m V_A^2 + m g (\cos \varphi - \cos \varphi) = \frac{1}{2} m V_B^2 \quad \therefore V_B = V_A$$

$$V^2 = V_A^2 + 2 g h$$



Un bloque de masa $m = 2 \text{ kg}$ se desliza desde A a lo largo de una superficie. Si $V_A = 3 \text{ ms}^{-1}$ y $\mu_c = 0.2$ y recorre una distancia $d_1 = 4.8 \text{ m}$ justo antes de llegar a B. calcular la constante de elasticidad K si el cuerpo deforma el resorte en $d_2 = 0.2 \text{ m}$, la velocidad con que llega a B: (V_B), y la distancia que alcanza al devolverse d_3 .

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$$

$$\int_A^B \vec{F}^{(cc)} d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}^{(nc)} d\vec{r} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = U_A - U_B + \int_A^B \vec{F}^{(nc)} d\vec{r}$$

$$\int_A^B \vec{F}^{(nc)} d\vec{r} = (K_B + U_B) - (K_A + U_A) = E_B - E_A; \vec{F}_f = -\mu N \frac{\vec{v}}{v} = -\mu N \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{dr} = -\mu N \frac{d\vec{r}}{dr}$$

$$\int_A^B \vec{F}_f d\vec{r} = \left(\frac{1}{2} m V_B^2 + 0 \right) - \left(\frac{1}{2} m V_A^2 + m g \sin \varphi d_1 \right) \Rightarrow \text{(tomamos el nivel de referencia en } d_1)$$

$$= \int_A^B \mu N \frac{d\vec{r}}{dr} d\vec{r} = \int_0^{d_1} \mu N dr = - \int_0^{d_1} \mu m g \cos \varphi dr = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 - m g \sin \varphi d_1$$

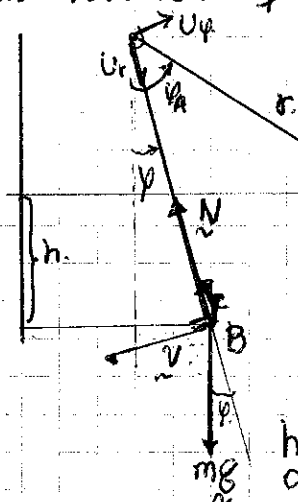
$$\Rightarrow -\mu m g \cos \varphi d_1 = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 - m g \sin \varphi d_1$$

$$V_B^2 = V_A^2 - g d_1 (g \sin \varphi - \mu \cos \varphi) \Rightarrow V_B = 6.3 \text{ m/s}$$

Las implicaciones de las fuerzas conservativas las podemos resumir así

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad \mathbf{F} = -\nabla U \quad \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U_A - U_B$$

Ejemplo 5. La rampa de una torre para competencias de esquí tiene forma de arco circular. Los competidores inician su movimiento en el punto A. calcular la velocidad que alcanzan en el punto B. No hay fricción.



determinar $v(\varphi)$ con tres métodos

- Dinámica
- Teorema del trabajo y la energía
- Conservación de la energía

i). $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} = -mr\dot{\varphi}^2 \mathbf{U}_r + mr\ddot{\varphi} \mathbf{U}_\varphi \quad (1)$$

hacemos producto punto por \mathbf{U}_r y luego por \mathbf{U}_φ para obtener la ecuación radial y transversal respectivamente

$$mg\mathbf{U}_r + N\mathbf{U}_r = -mr\dot{\varphi}^2 \mathbf{U}_r \rightarrow mg\cos\varphi - N = -mr\dot{\varphi}^2 \quad (1a)$$

$$mg\mathbf{U}_\varphi + N\mathbf{U}_\varphi = mr\ddot{\varphi} \mathbf{U}_\varphi \rightarrow mg\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = mr\ddot{\varphi} \quad (2a)$$

$$-mg\sin\varphi = mr\ddot{\varphi}$$

entonces de (2a) obtenemos que $\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = -\frac{g}{r}\sin\varphi$ multiplicamos por $d\varphi$ a ambos lados

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi \rightarrow \int_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi \quad \text{llamamos } \dot{\varphi} = w$$

$$\int_{w_A}^w w dw = \int_{\varphi_A}^{\varphi} -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi \rightarrow w^2 = w_A^2 - \frac{2g}{r}(\cos\varphi - \cos\varphi_A) \quad (3)$$

$$v = w r \rightarrow v^2 = v_A^2 + 2gr(\cos\varphi - \cos\varphi_A) \quad (3a)$$

$$v^2 = v_A^2 + 2gh \quad (4)$$

Este resultado equivale al problema 19. es un caso particular de este.

ii). $W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K_2 - K_1 \rightarrow \int_A^B (mg + N) d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \rightarrow$

$$\int_A^B (mg\cos\varphi \mathbf{U}_r - mg\sin\varphi \mathbf{U}_\varphi - N\mathbf{U}_r) \cdot (r d\varphi \mathbf{U}_\varphi + dr \mathbf{U}_r); \frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{U}_r}{dt} = 0$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} -mg\sin\varphi r d\varphi = mgr(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_A^2) \quad (5a)$$

$$v^2 = v_A^2 + 2gr(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad (5b)$$

$$= v_A^2 + 2gh \quad (6)$$

Fuerzas Conservativas en tres dimensiones

Para estudiar las fuerzas conservativas en tres dimensiones, definimos.

Operador "nabla" $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

Divergencia de \vec{G} $\nabla \cdot \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \hat{k} = \begin{cases} \text{Para } G \text{ f. escalar} \\ \text{Gradiente de } G \\ \text{div } \vec{G} \end{cases}$

Rotacional de $\vec{G} = \text{Rot } \vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \hat{k}$

$\text{Rot}(\text{div } \vec{G})$: para $G_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ $G_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ $G_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

ϕ es una función escalar.

$= \text{Rot}(\nabla \phi) = \text{Rot } \vec{G} = \nabla \times \vec{G} = \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \hat{k} \right]$

Concluimos que el rotacional de un gradiente es igual a cero.

Sea $U(\vec{r})$ la energía potencial en función del vector posición, con $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$. (y U una función escalar). por la regla de la cadena tenemos que:

$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}$ esta ecuación se puede escribir de la forma diferencial:

$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla U \cdot d\vec{r}$ (1)

El teorema del trabajo y energía para el caso mas general dice que:

$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}^{(c)} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}^{(nc)} \cdot d\vec{r} = -\Delta U + W_{A \rightarrow B}^{(nc)} = \Delta K$ (2)

Escrito de la forma diferencial.

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dW^{(c)} + dW^{(nc)} = -dU + dW^{(nc)} = dK$ (3)

Si solo actúan fuerzas conservativas, entonces la ecuación se reduce a.

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU = dK$ (4a) $\rightarrow \vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$ (4b)

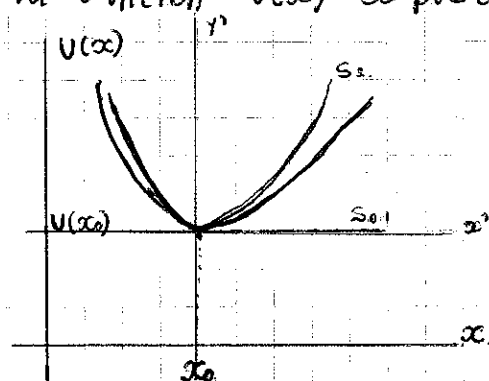
Reemplazando dU por el valor obtenido en (1) obtenemos que

$\vec{F} = -\frac{\Delta U \cdot d\vec{r}}{d\vec{r}} = -\Delta U$ $\vec{F} = -\text{grad } U$

Para una energía total E_3 el movimiento es oscilatorio entre $[I_1, I_2]$.

Para una energía total E_4 el movimiento ya no es oscilatorio, pues la partícula se mueve bien sea en $[-\infty, I_1]$ o $[I_2, +\infty)$, para la región $[I_1, +\infty)$ $K \neq 0$ es constante, entonces la partícula presenta una velocidad diferente de cero constante.

Consideremos el caso particular donde $E = E_1$, entonces la función $U(x)$ se puede desarrollar con una serie de Taylor



$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n U}{dx^n} \right)_{x=x_0} (x-x_0)^n$$

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x_0} (x-x_0)^2 + \dots$$

$U(x_0)$ es el valor mínimo de la función.
 $\left[\frac{dU}{dx} \right]_{x_0}$ es la pendiente de dicho valor mínimo, que es igual a cero.

$\left[\frac{d^2 U}{dx^2} \right]_{x_0}$ es la segunda derivada en dicho valor mínimo, que debe ser positiva, por lo que la denominamos K .

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} K (x-x_0)^2.$$

Si trasladamos los ejes, colocando el origen en $(x_0, U(x_0))$ entonces la ecuación anterior nos queda.

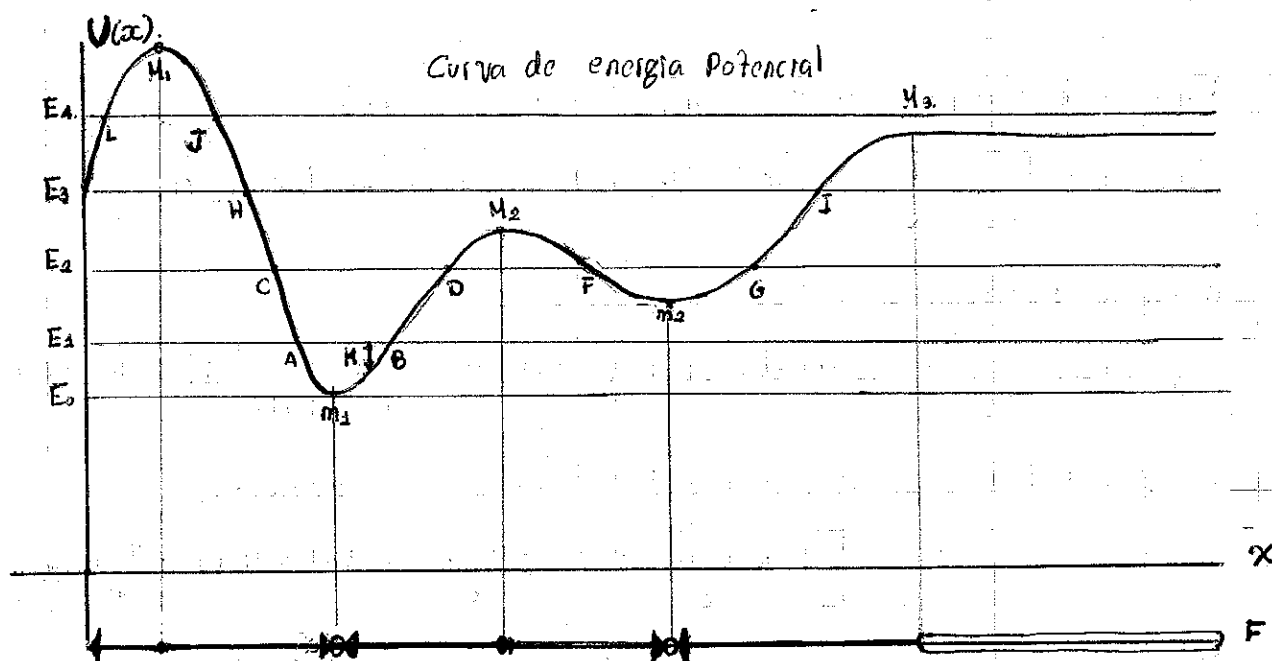
$$U(x) = \frac{1}{2} K x^2 \quad \text{que corresponde a la ecuación del movimiento armónico desde el punto de vista de la energía.}$$

Solución del Problema del movimiento partiendo de la energía potencial.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U$$

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U]}$$



En todos los puntos donde la pendiente es horizontal, la fuerza es cero, y por lo tanto, se le denominan puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio donde $V(x)$ es mínimo: $\{m_1, m_2\}$ se les denominan puntos de equilibrio estables, puesto que si la partícula es desplazada ligeramente de su posición, es sometida a una fuerza que tienda a devolverla a dicha posición. Los puntos de equilibrio donde $V(x)$ es máximo se denominan puntos de equilibrio inestables, puesto que si la partícula se desplaza ligeramente de esta posición experimenta una fuerza que trata de alejarla más de esta. La región de equilibrio para $x > M_3$ se denomina indiferente.

Consideremos ahora una partícula cuya energía total está dada por la recta horizontal E_0 . Luego, esta partícula está confinada a permanecer en E_0 , donde $E = V$ y por lo tanto, $E_{cinética}$ es igual a cero. (La partícula permanece en reposo).

Ahora consideremos la partícula con una energía total E_1 . observamos que la energía cinética está dada por la distancia entre la raya y la curva: $K = E - V > 0$. Por lo tanto el movimiento está confinado a la región $[A, B]$ de lo contrario la energía potencial tendría que ser mayor a la energía total y esto supondría que la energía cinética fuera negativa, lo que no puede ser.

En el punto donde V es mínimo, K es máximo, entonces V es máxima y en los puntos A y B $V = E$ y por lo tanto, $K = 0$ y $V = 0$.

Si la partícula tiene una energía mayor E_2 hay dos regiones posibles para que ella oscile: $[C, D]$ o $[F, G]$. sin embargo, clásicamente es imposible que la partícula cambie de región, puesto que están separadas por una barrera de potencial.

Energía Potencial gravitacional (Fuerza constante)

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} F \cdot dr = -mg(y_B - y_A) = V_A - V_B \Rightarrow U = mgh.$$

Energía Potencial en Fuerzas centrales

$$\int_{r_A}^{r_B} F \cdot dr = \int_{r_A}^{r_B} F(r) \cdot U_r dr \quad U_r = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr \quad \text{entonces } U(r) \text{ sólo depende del radio.}$$

Energía Potencial gravitacional y eléctrica (Fuerzas centrales).

$$W_{A \rightarrow B} = \int F_{elec} dx = \int_{r_A}^{r_B} \pm k \frac{q_A q_B}{r^2} dr = \pm \frac{q_A q_B}{r} (r_A - r_B) \Rightarrow U(r) = \pm \frac{q_A q_B}{r} k$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int F_{grav} dr = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r} (r_B - r_A) \Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Energía Potencial en una fuerza restauradora.

$$W_{r_A \rightarrow r_B} = \int_{r_A}^{r_B} -kx dx = -\frac{kx^2}{2} (r_B - r_A) = -\frac{kx_B^2}{2} + \frac{kx_A^2}{2} = U_A - U_B$$

$$\rightarrow U(r) = \frac{1}{2} kx^2$$

Curvas de Energía Potencial en el movimiento en una dimensión bajo fuerzas conservativas:

Supongamos que F es una fuerza conservativa que actúa en una sola dimensión, entonces:

$$i) F dx = -dU \Leftrightarrow F = -\frac{dU}{dx}$$

De acuerdo a lo anterior, en una gráfica de energía potencial contra posición la fuerza está dada por el negativo de la pendiente: si la curva crece, la fuerza es negativa y viceversa. Como conocemos la fuerza, podemos conocer el movimiento de la partícula, teniendo además en cuenta los dos siguientes puntos:

$$ii) E = \frac{1}{2} mv^2 + U(x) \text{ se conserva, despejando } v$$

$$iii) v = \sqrt{\frac{2(E - U(x))}{m}}$$

$$iii) \frac{1}{2} mv^2 \geq 0 \text{ de lo contrario, sería imaginaria.}$$

Fuerzas no conservativas

Hemos encontrado que todas las fuerzas de fricción no son conservativas, pues el trabajo realizado en una trayectoria cerrada no es nulo, (siempre es negativo); de acuerdo a esto, si consideramos un sistema en donde actúan fuerzas tanto conservativas como no conservativas, entonces del teorema del trabajo y la energía tenemos que:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A \quad \text{donde } \vec{F} = \vec{F}^{(c)} + \vec{F}^{(nc)} \quad \text{entonces}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} (\vec{F}^{(c)} + \vec{F}^{(nc)}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}^{(c)} \cdot d\vec{r} + \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}^{(nc)} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A$$

$$\rightarrow U(r_A) - U(r_B) + W_{A \rightarrow B}^{(nc)} = K_B - K_A$$

$$W_{A \rightarrow B}^{(nc)} = [K_B + U(r_B)] - [K_A + U(r_A)] = E_B - E_A$$

Entonces, cuando en un sistema actúan fuerzas no conservativas la energía mecánica se disipa.

Esta diferencia se puede atribuir a la transferencia entre el sistema y el resto del universo de energía debido a que el sistema cambia de estado.

Potencia "Producida" en las fuerzas de fricción.

$$dW^{(nc)} = dE$$

$$P = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = \frac{dW^{(nc)}}{dt} = \frac{dE}{dt} < 0 \quad \text{Porque la fuerza de fricción siempre se opone a la velocidad.}$$

La potencia es negativa (La energía de la partícula disminuye con el tiempo) Por lo tanto el sistema disipa energía.

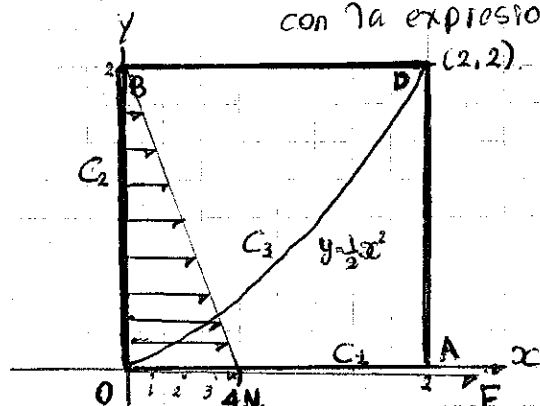
El trabajo de las fuerzas no conservativas se puede entender considerando que, si bien el movimiento presenta una trayectoria cerrada macroscópicamente, microscópicamente no lo es.

Energía potencial asociada a una fuerza constante:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_B - K_A = F(r_B - r_A) \quad F_{fB} - F_{fA} = U_A - U_B$$

$$\text{entonces } U(r) = -F r$$

Ejemplo 4: Una fuerza actúa en función de la posición con la expresión $F = (4 - 2y)i \text{ N}$ una partícula se desplaza de $O = (0,0)$ a $D = (2,2)$



Por tres trayectorias distintas, hayar el trabajo realizado por la fuerza en cada una de las trayectorias.

$$C_1 = O - B - D.$$

$$C_2 = O - A - D.$$

$$C_3 = O - y = \frac{1}{2}x^2 - D.$$

$$W_{O \rightarrow D}^{C_1} = \int_O^D F \cdot d\vec{r} = W_{OA} + W_{AD} = \int_0^2 4i \text{ N} dx + \int_0^2 (4 - 2y)i \text{ N} dy = 4 \text{ N}(2 - 0) = 8 \text{ Nm} = 8 \text{ Julios}.$$

$$W_{O \rightarrow D}^{C_2} = W_{OB} + W_{BD} = \int_0^2 (4 - 2y)i dy + \int_0^2 0 \text{ N} dx = 0 + 0 = 0.$$

$$W_{O \rightarrow D}^{C_3} = \int_O^D F \cdot d\vec{r} = \int_0^D (4 - 2y)i \text{ N} (dx i + dy j) \quad y = \frac{x^2}{2}$$

$$= \int_0^D (4 - x^2)i \text{ N} (dx i + dy j) = \int_0^2 (4 - x^2) dx \cdot \left[\frac{4x - x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3} \text{ Julios}$$

Fuerzas conservativas.

Se denominan fuerzas conservativas aquellas donde el trabajo que se realice solo depende de la posición inicial y final y no de la trayectoria y, por lo tanto, el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es nulo. En dichas fuerzas se cumple que:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F \cdot d\vec{r} = \Phi(r_B) - \Phi(r_A) = K_B - K_A \quad (1)$$

definimos $U(r) = -\Phi(r)$, entonces $(1) = U(r_A) - U(r_B) = K_B - K_A$.

$$W_{A \rightarrow B} = U(r_A) - U(r_B) = K_B - K_A \quad (2) \text{ Entonces. llamamos}$$

$U(r)$ energía potencial, como una función tal que la diferencia entre la posición inicial y final nos dé el trabajo realizado.

de (2) tenemos que $U(r_A) + K(r_A) = U(r_B) + K(r_B)$.

Llamamos $K + U$ energía mecánica y deducimos que la energía mecánica en las fuerzas conservativas se conserva.

$$E = K + U = \text{cte.}$$

Trabajo realizado por una fuerza elástica:

Ejemplo Ilustrativo: calcular el trabajo requerido para estirar un resorte 2 cm con velocidad constante, si se sabe que cuando un cuerpo de masa 4 kg se cuelga del resorte la longitud de este aumenta en 1.5 cm

$$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{40 \text{ N}}{0.015 \text{ m}} = \frac{8}{3} \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B kx dx = \left[k \frac{x^2}{2} \right]_A^B = \frac{1}{2} k B^2 - \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{si } B = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}, A = 0$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \frac{2.8}{3} \cdot 10^{-2} \text{ J} = \frac{16}{3} \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

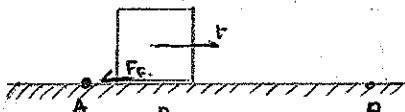
Igualmente podemos afirmar que $\oint F \cdot dr = 0$.

Hemos encontrado que el trabajo realizado por las fuerzas centrales, elásticas y constantes no depende de la trayectoria y el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es cero.

Trabajo realizado por las fuerzas de fricción:

$$F_f = -\mu N U_T \quad U_T = 1 \text{ si va a la derecha}$$

$$U_T = -1 \text{ si va a la izquierda.}$$

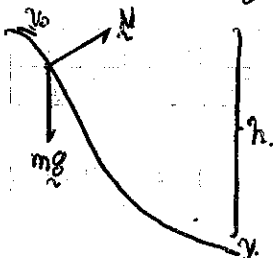


$$W_{A \rightarrow A} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = \int_A^B -\mu N dx + \int_B^A -\mu N (-1) dx$$

$$= \int_A^B -\mu N dx + \int_A^B \mu N dx = -2 \int_A^B \mu N = -2\mu N (B-A) = 0.$$

$\oint F dr \neq 0$ el trabajo depende de la trayectoria.
El trabajo siempre es negativo: la energía cinética se pierde.

Ejemplo 3: resolución del problema 19 con el teorema del trabajo y la energía:



$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B (mg + N) \cdot dr \quad N \perp dr$$

$$\int_A^B mg \cdot dr = mg \int_A^B \hat{j} \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j}) = mg h$$

$$\frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) = mgh \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gh$$

Trabajo de una fuerza constante

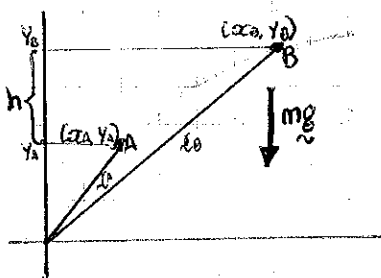
Si la fuerza es constante, el trabajo que realiza dicha fuerza será:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \int_{r_A}^{r_B} dr = F r_B - F r_A$$

La trayectoria sólo depende de las posiciones inicial y final, y por lo tanto, el trabajo realizado por una fuerza constante en una trayectoria cerrada es cero:

$$W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = 0 \text{ que se denota } \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ejemplo 1: Trabajo de la fuerza de gravedad.



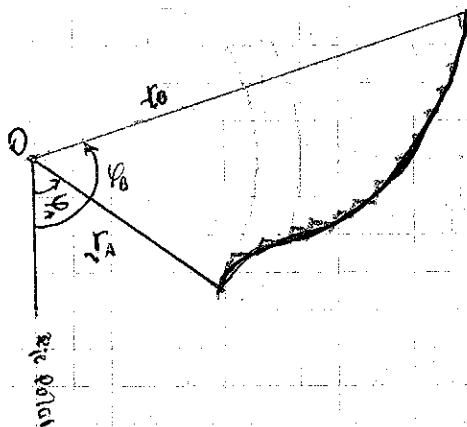
$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg \cdot (r_B - r_A) = -mg(y_B - y_A)$$

$$W_{A \rightarrow B} = -mgh$$

$y_B > y_A \rightarrow$ hay pérdida de energía cinética

$y_B < y_A \rightarrow$ hay aumento de energía cinética.

Trabajo de una fuerza central



$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \hat{U}_r$$

$$d\vec{r} = \hat{U}_r dr + r d\phi \hat{U}_\phi$$

$$d\vec{r} = dr \hat{U}_r + r d\phi \hat{U}_\phi$$

$$d\vec{r} = dr \hat{U}_r + r d\phi \hat{U}_\phi$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_{\phi_A}^{\phi_B} \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr \cdot (dr \hat{U}_r + r d\phi \hat{U}_\phi)$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr$$

El trabajo en una fuerza central no depende del ángulo de giro, solo depende de la distancia que se halla acercado o alejado del polo.

Asimismo, el trabajo realizado en una trayectoria cerrada por una fuerza central es nulo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ejemplo 2: Trabajo en un campo gravitacional.

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{U}_r = f(r) \hat{U}_r \text{ donde } f = -\frac{GMm}{r^2} \text{ con } M, m \text{ constantes, entonces.}$$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{r_A}^{r_B} -\frac{GMm}{r^2} dr = -GMm \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_A}^{r_B} = GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Si $r_B > r_A \rightarrow W < 0$ Pierde $E_{\text{cinética}}$
Si $r_B < r_A \rightarrow W > 0$ gana $E_{\text{cinética}}$.